4 META-LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

4-1 Aussagen-Logik

Hier wird noch einmal das wichtige Thema der *Abgrenzung von synthetischen und analytischen Relationen* aufgegriffen. Diese Abgrenzung wird, am Fall der Implikation, unter verschiedenen Aspekten diskutiert und – durch die neue Heranziehung der *theoretischen Meta-Wahrscheinlichkeit* – weiter präzisiert.

4-2 Quantoren-Logik

Es werden Formeln zur Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit und damit des logischen Ableitungsgrades von *quantoren-logischen Schlüssen* dargestellt. Zur Untermauerung und Veranschaulichung werden diese Formeln immer wieder durch *Wahrheitstafeln* ergänzt.

4-3 Quantitative Logik

Dieser Punkt ist womöglich der schwierigste in dem ganzen Text. Es werden verschiedene *Formeln* zur Berechnung (des Folgegrades) *quantitativer Schlüsse* unterschiedlicher logischer Struktur vorgestellt. Dabei konzentriere ich mich in erster Linie auf die *Positiv-Implikation*. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist die Unterscheidung zwischen empirischer und logischer Abhängigkeit.

4-4 Quantitative Aussagen-Logik

Hier werden die Formeln aus 4-3 auf *deterministische* Schlüsse (mit $p = 1$ oder $p = 0$) angewandt. Auch dabei wird die *Positiv-Implikation* wieder gegenüber der *Normal-Implikation* bevorzugt, weil die quantitativen Schlüsse mit der Positiv-Implikation nicht zu solchen Paradoxien führen wie bei der Normal-Implikation.

4-5 Quantitative Quantoren-Logik

Im Rückgriff auf 4-2 wird der Grad der Folgerichtigkeit für quantoren-logische Schlüsse angegeben, bei denen der Quantor *numerisch präzisiert* ist. Es geht also um Schlüsse mit $p = 1$, $p < 1$, $p = 0$ und $p > 0$.

Im Kapitel 3 wurde die *Meta-Logik* für *synthetische* Relationen dargelegt. Dabei definierte ich Meta-Logik primär über *Meta-Werte*, insbesondere über die *theoretische Wahrscheinlichkeit*, die man als *Meta-Wahrscheinlichkeit* verstehen kann.

Diese *theoretische Wahrscheinlichkeit* gibt bei *synthetischen* Relationen an:
– einerseits den *Grad der Tautologie*
– andererseits die Größe oder Sicherheit der *empirischen Abhängigkeit* (Korrelation)

In diesem Kapitel 4 wird nun gleichermaßen die Bedeutung der *Meta-Wahrscheinlichkeit* für *semi-analytische* und *analytische* Relationen, vor allem logische *Schlüsse*, dargelegt; es wird sich zeigen, dass die Meta-Wahrscheinlichkeit hier grundsätzlich die gleichen Funktionen besitzt; sie gibt an:

– den *Grad der Tautologie* (oder Kontradiktion) der Relation.
  Vor allem geht es darum, wie die Meta-Wahrscheinlichkeit den Grad einer *logischen Folge* $\Phi \Rightarrow \Psi$ bzw. $\Phi \longrightarrow \Psi$ anzeigt.
– den Grad der logischen bzw. *analytischen Abhängigkeit* zwischen den Komponenten der Relation.

Allerdings besteht hier folgender Unterschied: Bei einer *synthetischen* Relation sind die Relata (bzw. die Variablen) *logisch* von einander *unabhängig*. Die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt den Grad der *synthetischen Abhängigkeit* an.

Bei einer *(semi-)analytischen* Relation sind die Relata teilweise oder vollständig *logisch* voneinander *abhängig*. Und die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt den Grad dieser *logischen* (bzw. analytischen) *Abhängigkeit* an.

Vor allem in diesem Kapitel 4 werden viele, von mir entwickelte *logisch-mathematische Formeln* zur Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T vorgestellt. In erster Linie geht um die Berechnung der p^T von *Schlüssen*, womit der *Grad der Folgerichtigkeit* eines Schlusses angegeben wird. Diese Formeln wurden sorgfältig entwickelt und geprüft, aber es hätte den Rahmen der Arbeit gesprengt, strenge Beweisverfahren für jede Formel vorzulegen.

4 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

4-1-1 Einführung

4-1-1-1 DEFINITIONEN

Es wurde bereits genau unterschieden zwischen:

- *analytischen*
- *synthetischen*
- *partiell analytischen*

Relationen bzw. Strukturen oder Sätzen bzw. Aussagen.

Jetzt soll diese wesentliche Unterscheidung noch weiter präzisiert und quantifiziert werden. Warum ich von vielen, lange geprüften Unterscheidungen gerade diese 3-Teilung hier vorziehe, wurde schon in 2-1-1-2 erläutert.

Zunächst fasse ich noch einmal zentrale bisherige Bestimmungen zusammen:

• *analytische Relationen bzw. Strukturen*

Bei diesen Strukturen gilt: „Eine Struktur Φ wird als (partiell) analytisch in Relation zu einer Struktur Ω bestimmt“.

In der *klassischen Philosophie* galt als analytisch: Das *Prädikat* ist im *Subjekt* bereits *enthalten*, z. B. „alle Junggesellen sind unverheiratet“. Solche sprachlichen, *material-analytischen* Bestimmungen (vgl. Kapitel 0) werden hier aber beiseite gelassen.

Doch man kann entsprechend bestimmen, z. B. bei einer Folge: *Die Konklusion ist in der Prämisse (bzw. den Prämissen) bereits enthalten.* Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Y ist ja Bestandteil von $X \wedge Y$. Wenn also die Prämissen $X \wedge Y$ wahr sind, kann man durch *Analyse* der Prämissen bereits die Wahrheit der Konklusion Y beweisen, ohne empirische Prüfung von Y.

Syntaktisch zeigt sich das dadurch, dass *rechts* und *links* vom Relator (z. B. $\Rightarrow$) wenigstens partiell die *gleichen* deskriptiven Zeichen stehen; so steht bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$ das Y rechts und links vom Relator $\Rightarrow$.

Logische Folgen $\Rightarrow$ sind die wichtigsten analytischen Strukturen, aber man kann Analyzität für alle Junktoren definieren.

Genauer kann man bei den analytischen Strukturen unterscheiden zwischen *tautologisch* und *kontradiktorisch*.

• *synthetische Relationen bzw. Strukturen*

Hier ist keine *logische* Abhängigkeit vorgegeben, allerdings kann eine empirische Abhängigkeit ausgedrückt werden. Z. B. die Implikation $X \rightarrow Y$: Bei ihr ist Y in keiner Weise schon (logisch) in X enthalten.

Auch *syntaktisch* gilt: Es stehen rechts und links vom Relator nur unterschiedliche Objekt-Zeichen (vgl. $X \rightarrow Y$).

Andererseits ist $X \rightarrow Y$ in der Wahrheits-Tafel so definiert, dass es in 3 von 4 möglichen Welten wahr ist. Man kann also allein durch Kenntnis von $X \rightarrow Y$ konstatieren, dass der Satz mit einer theoretischen Wahrscheinlichkeit von $p^T = 3/4$ wahr ist, ohne Kenntnis der Wahrheit von X und Y.

Daher kann man $X \rightarrow Y$ als *partiell tautologisch* bezeichnen. Es mag ungewöhnlich scheinen, auch *synthetische* Strukturen als *partiell tautologisch* darzustellen, aber nach langen Abwägungen verschiedener Modelle scheint mir das die beste Lösung.

Eventuell könnte man *synthetische*, *partiell-tautologische* Relationen im Sinne der *synthetisch-apriorischen* Aussagen von Kant verstehen.

Ob synthetische Strukturen sogar *vollständig* tautologisch oder vollständig widersprüchlich sein können, ist diskutabel, aber ich halte es letztlich für falsch bzw. nicht sinnvoll – solche synthetischen *streng* tautologischen Relationen würden natürlich noch exakter zum synthetisch-apriorischen Modell passen; dies wird an späterer Stelle weiter diskutiert.

• semi-analytische Relationen bzw. Strukturen

Problematisch einzuordnen sind vor allem die Strukturen, die ich *partiell analytisch* oder *semi-analytisch* genannt habe.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Strukturen einzuordnen
- als eigene (dritte) Kategorie
- bei den analytischen Strukturen
- bei den synthetischen Strukturen, denn man kann *partiell analytische* Strukturen genauso gut *partiell synthetisch* nennen.

Ich werde die semi-analytischen Relationen vorwiegend bei den *analytischen* Strukturen behandeln.

4-1-1-2 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT

Als neues Kriterium zur Bestimmung analytischer Relationen verwenden wir jetzt die *theoretische Wahrscheinlichkeit*. Entscheidend ist, dass zur näheren Kennzeichnung *sowohl von analytischen wie synthetischen* Strukturen auf die *theoretische Wahrscheinlichkeit* zurückgegriffen werden kann. Diese gibt an, wie wahrscheinlich eine Struktur ist, allein auf Grund der möglichen Kombinationen (bzw. der möglichen, logischen Welten oder der numerischen Fälle in den logischen Welten).

Ich schreibe die *theoretische* Wahrscheinlichkeit (wie schon eingeführt) ‚p^T', sie nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, ebenso wie auch die empirische Wahrscheinlichkeit p.

Man unterscheidet in *Wahrscheinlichkeits*- oder *Modal*-Begriffen:

$p^T = 1$	sicher	notwendig
$p^T = 0$	sicher nicht	unmöglich
$0 < p^T < 1$	(genau) unsicher	(genau) möglich

(„unsicher" reicht von wahrscheinlich bis unwahrscheinlich)

Diese theoretische Wahrscheinlichkeit können wir zugleich als Gradmesser nehmen für die *theoretische Wahrheit*, nämlich die *Tautologie*, deren Werte sind also identisch:

Tautologischer Grad (auch als p^T abzukürzen oder ggf. als w^T für theoretische Wahrheit)

$p^T = 1$	tautologisch
$p^T = 0$	kontradiktorisch
$0 < p^T < 1$	partiell tautologisch

Man könnte allerdings auch umgekehrt einen *Grad der Kontradiktion* p^K einführen. Dessen Werte verhielten sich umgekehrt zu p^T, so dass z. B. die Tautologie einen Kontradiktions-Grad von $p^K = 0$ besitzt. Dessen Werte entsprechen dem *Informations-Grad*.

Beispiele sind:

Tautologie, z. B.:	$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y] = 4/4 = 1$
Semi-analytisch, z. B.:	$p^T[X \longrightarrow X \wedge Y] = 3/4 = 0{,}75$
	$p^T[(X \vee Y) \longrightarrow (X \wedge Y)] = 2/4 = 0{,}5$
	$p^T[(X \vee Y) \longrightarrow (X \nabla Y)] = 1/4 = 0{,}25$
Kontradiktion, z. B.:	$p^T[(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)] = 0/4 = 0$

Hier ist grundsätzlich noch anzumerken: Relatoren sind *synthetisch* definiert, z. B. der Implikator $\rightarrow$ durch $X \rightarrow Y$. Dabei besitzen sie gemäß ihrer Wahrheitstafel eine bestimmte – *strukturelle* – theoretische Wahrscheinlichkeit, bei $X \rightarrow Y$ gilt z. B.: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$. Wird dieser Relator nun aber in einer analytischen oder semi-analytischen Relation eingesetzt, so muss die p^T dieser Relation natürlich nicht der strukturellen Wahrscheinlichkeit des Relators entsprechen. Wie die obigen Beispiele zeigen, kann in der Tat aus der Verwendung von $\rightarrow$ jede (hier) mögliche p^T resultieren: 4/4, 3/4, 2/4, 1/4, 0/4.

4-1-1-3 PRÄZISIERUNGEN

Man kann den Bereich von semi-analytischen Relationen weiter präziseren. Wie eben bemerkt, kann man sowohl von *partiell-tautologisch* wie von *partiell kontradiktorisch* sprechen. So bietet sich (bei 2 Variablen) folgende Unterteilung an:

Semi-analytische Relationen:

• *Partiell tautologisch*: wahrscheinlich			
z. B. $X \vee Y \longrightarrow Y$	$p^T = 3/4$	$p^T > 2/4$	$p^T > 0{,}5$
• *Partiell kontradiktorisch*: unwahrscheinlich			
z. B. $X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 1/4$	$p^T < 2/4$	$p^T < 0{,}5$
• *Kontingent*: zufällig			
z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 2/4$	$p^T = 2/4$	$p^T = 0{,}5$

Kontingente Relationen – hier z. B. $p^T = 2/4$ – liegen also zwischen partiell tautologischen und partiell kontradiktorischen Relationen. Ich nenne ich daher auch *‚neutral'*. Man kann allgemeiner bestimmen: l*ogisch neutral* sind Strukturen, deren Wert $p^T = 0{,}5$ beträgt, also *genau mittig* zwischen dem Wert $p^T = 1$ der Tautologie und $p^T = 0$ der Kontradiktion liegt.

Nach den bisher vollzogenen Präzisierungen kann man bestimmen:

analytisch $\Leftrightarrow$ tautologisch $\vee$ kontradiktorisch

semi-analytisch $\Rightarrow$ partiell tautologisch $\vee$ neutral $\vee$ partiell kontradiktorisch

Hier kann man nicht die Äquivalenz verwenden, denn es gilt eben auch:

synthetisch $\Rightarrow$ partiell tautologisch $\vee$ neutral $\vee$ partiell kontradiktorisch

(Natürlich könnte man anstelle des *einschließenden* „oder" $\vee$ auch das *ausschließende* „oder" $><$ verwenden, denn es geht hier um ausschließende Bestimmungen.)

4-1-1-4 ÜBERSICHT

Ich gebe nachfolgend eine Übersicht über *synthetische* und *(semi)analytische Relationen*; im analytischen Bereich beschränke ich mich auf Relationen mit der Implikation:

analytische Strukturen	z. B.	p^T (theoret. Wahrscheinlichkeit)	
• streng analytisch			
Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	$p^T = 4/4$	1,0
Kontradiktion	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$	$p^T = 0$	0,0
• partiell analytisch			
semi-tautologisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$	$p^T = 3/4$	0,75
logisch neutral	$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 2/4$	0,5
semi-kontradiktorisch	$X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 1/4$	0,25
synthetische Strukturen			
semi-tautologisch	$X \rightarrow Y$	$p^T = 3/4$	0,75
logisch neutral	$X \leftrightarrow Y$	$p^T = 2/4$	0,5
semi-kontradiktorisch	$X \wedge Y$	$p^T = 1/4$	0,25

Für die *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ gilt: $p^T = 1/2 = 0{,}5$

4-1-1-5 ABGRENZUNGEN

Die theoretische Wahrscheinlichkeit reicht,

- um synthetisch und analytisch abzugrenzen, wenn man sinnvollerweise bei *synthetisch* Tautologien mit $p^T = 1$ und Kontradiktionen mit $p^T = 0$ ausschließt. Dann gilt:
  analytisch: $p^T = 1$ oder $p^T = 0$,
  synthetisch $0 < p^T < 1$.
- um semi-analytisch und analytisch abzugrenzen, mit der gleichen Begründung:
  analytisch: $p^T = 1$ oder $p^T = 0$
  semi-analytisch: $0 < p^T < 1$

Offensichtlich reicht die theoretische Wahrscheinlichkeit aber *nicht*, um *synthetisch* und *semi-analytisch* voneinander abzugrenzen. Außerdem würde man sich auch zusätzliche Kriterien wünschen, um analytisch und semi-analytisch, aber auch um tautologisch und kontradiktorisch abzugrenzen. Dazu waren früher schon mehrfach verschiedene Kriterien genannt worden; diese sollen jetzt beim Thema *Implikation* noch einmal systematisch geprüft werden – dieser Abschnitt wendet sich vor allem an Experten.

4-1-2 Implikation

Wir wollen hier folgende Möglichkeiten der Implikation unterscheiden:

	Beispiele:
• Analytisch / Tautologie (logischer Schluss):	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
• Analytisch / Kontradiktion:	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$
• Semi-analytisch:	$X \vee Y \longrightarrow Y$
• Synthetisch:	$X \rightarrow Y$

Der *synthetische* Fall $X \rightarrow Y$ gehört zwar nicht in den analytischen Bereich, aber wir ziehen ihn zur Abgrenzung mit heran.

Es sollen nun folgende Kriterien genauer untersucht werden, die geeignet sind, analytische, semi-analytische und synthetische Relationen genauer abzugrenzen. Diese Kriterien sind:

- syntaktische Folge
- Enthaltensein
- Abhängigkeit
- Analyzität

Die meisten folgenden Aussagen gelten nicht nur für die Implikation, sondern auch für andere Relatoren. Aber die *Implikation* spielt eine besondere Rolle in der Logik.

4-1-2-1 SYNTAKTISCHE FOLGE

• synthetisch

Bei einer synthetischen Relation wie $X \rightarrow Y$ stehen *vor* und *hinter* dem Relator $\rightarrow$ nur *unterschiedliche* Objektzeichen, also hier X und Y.

• semi-analytisch

Hier stehen *partiell oder vollständig gleiche* Objekt-Zeichen vor und hinter dem Relator $\longrightarrow$
Partiell gleich: $X \vee Y \longrightarrow Y$, vollständig gleich: $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$

• analytisch-tautologisch

Hier stehen auch *partiell oder vollständig gleiche* Objekt-Zeichen vor und hinter dem Relator
Partiell gleich: $X \Rightarrow X \vee Y$, vollständig gleich: $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

Allerdings ist der *Schluss auf eine Tautologie* logisch wahr, gleichgültig, was die Prämisse beinhaltet. Z. B. $X \Rightarrow Y \vee \neg Y$. Hier liegt also eine (streng analytische) Tautologie vor, obwohl vor und hinter dem Relator *nur unterschiedliche* Zeichen vorkommen. Ich möchte dies aber als einen Sonderfall verstehen.

• analytisch-kontradiktorisch

$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$

Die *Kontradiktion* ist insgesamt ein Sonderfall. Wie schon mehrfach beschrieben, ist bei der normalen Implikation nur in *einem* extremen Fall eine Kontradiktion gegeben, wenn aus einer *Tautologie* eine *Kontradiktion* „folgt". Deswegen ist hier das obige Kriterium kaum verwendbar (es können ganz unterschiedliche, ja beliebige Zeichen auftreten).

Man sieht, dieses syntaktische Kriterium ist geeignet, um synthetisch und (semi-)analytisch abzugrenzen, aber innerhalb des analytischen Bereichs nicht. Doch als ein *meta-sprachliches* Kriterium ist es in seiner *ontischen* Verwendbarkeit natürlich prinzipiell begrenzt. Es lässt sich allerdings auch ontologisch interpretieren, wie der nächste Punkt zeigt.

4-1-2-2 ENTHALTENSEIN

Zunächst kann man dabei an ein Enthaltensein entsprechend der *syntaktischen Analyse* denken. Dabei ist bei einer implikativen Relation immer primär die Frage, ob die *Konklusion* (das Nachglied) in der *Prämisse* (dem Vorglied) bereits enthalten ist.

• synthetisch

$X \rightarrow Y$: Hier ist Y (Konklusion) keineswegs in X (Prämisse) enthalten.

• semi-analytisch

$X \vee Y \longrightarrow Y$: Hier ist Konklusion Y *vollständig* in Prämisse $X \vee Y$ enthalten
$X \longrightarrow X \wedge Y$: Hier ist die Konklusion *partiell* in der Prämisse enthalten; denn X ist eben in X enthalten, Y aber nicht.

• analytisch-tautologisch

$X \wedge Y \Rightarrow Y$: Hier ist Y (Konklusion) *vollständig* in $X \wedge Y$ (Prämisse) enthalten
$X \Rightarrow X \vee Y$: Hier ist die Konklusion *partiell* in der Prämisse enthalten.

• analytisch-kontradiktorisch

Bei der Kontradiktion mit der Normal-Implikation ergeben sich wieder die o. g. Schwierigkeiten. Verwendet man die Positiv-Implikation, so kann man sagen:

$X \ast\not\Rightarrow \neg X$: Hier ist die Konklusion (zunächst) vollständig in der Prämisse enthalten.

$X \ast\not\Rightarrow \neg X \wedge Y$: Hier ist die Konklusion (zunächst) partiell in der Prämisse enthalten. (allerdings wird sie dann durch die *Negation* logisch *ausgeschlossen*)

Zum ersten sieht man: Zwar ist so wiederum eine Abgrenzung von synthetisch zu (semi-) analytisch möglich, aber nicht zwischen analytisch und semi-analytisch.

Zum zweiten ergibt sich aber noch folgendes Problem:

Wir müssen hier *2* Modelle von – *logischem* – Enthaltensein unterscheiden, bei $\Phi \Rightarrow \Psi$:

1) Φ ist vollständig in Ψ enthalten (Ψ ist partiell in Φ enthalten)
2) Ψ ist vollständig in Φ enthalten (Φ ist partiell in Ψ enthalten)

Das klären wir am besten zunächst anhand einer analytischen Relation, z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$:

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

Wir können also 2 Modelle unterscheiden:

1) *Prämisse ist in Konklusion enthalten*

$X \wedge Y$ ist in Y enthalten

- die Menge der Welten, in denen $X \wedge Y$ gültig ist (nur 1 Welt), ist eine Teilmenge der Welten, in denen Y gültig ist (2 Welten)
- Y umfasst $X \wedge Y$ und $\neg X \wedge Y$; denn es gilt: $Y \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)$, also ist $X \wedge Y$ Teil von Y
- die Schnittmenge $X \cap Y$ ist eine Teilmenge von Y: $(X \cap Y) \subset Y$

2) *Konklusion ist in Prämisse enthalten*

Y ist in $X \wedge Y$ enthalten

- syntaktisch: hier ist das Zeichen ‚Y' in der Zeichenkombination ‚$X \wedge Y$' enthalten
- der Informationsgehalt von Y ist im Informationsgehalt von $X \wedge Y$ enthalten
- die Menge der Welten, in denen Y ungültig ist (2 Welten), ist eine Teilmenge der Welten, in denen $X \wedge Y$ ungültig ist (3 Welten)

Zusammenfassend ist ein Schluss gültig, wenn:

- der Informationsgehalt der Konklusion (Y) im Informationsgehalt der Prämisse ($X \wedge Y$) enthalten ist.
- die Menge der Welten, in denen die Prämisse ($X \wedge Y$) gültig ist, in der Menge der Welten enthalten ist, in denen die Konklusion (Y) gültig ist.

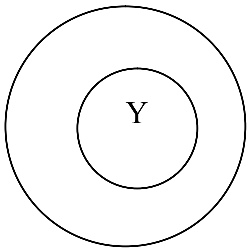
Noch kurz zur analytischen *Kontradiktion* (unter dem Aspekt möglicher Welten):

Bei $X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$ sind die gültigen und ungültigen Welten völlig disjunkt, denn bei der Tautologie $X \vee \neg X$ gibt es *nur gültige* Welten und bei $X \wedge \neg X$ *nur ungültige* Welten.

• semi-analytisch

Wir nehmen das Beispiel $X \vee Y \longrightarrow Y$

$X \vee Y$



$X \vee Y$	$\longrightarrow$	Y
+	+	+
+	−	−
+	+	+
−	+	−

Hier gilt: Der Informationsgehalt der Konklusion (Y) ist *nicht vollständig* in dem der Prämisse ($X \vee Y$) enthalten, daher ist der Schluss nur semi-analytisch bzw. semi-tautologisch.

Und: Die Menge der gültigen Welten der Konklusion Y ist eine Teilmenge der Menge der gültigen Welten der Prämisse $X \vee Y$. Wir haben also genau umgekehrte Verhältnisse wie bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Das ist leicht erklärt: $X \vee Y \longrightarrow Y$ ist eben eine semi-analytische Relation, aber wenn man Prämisse und Konklusion umkehrt, erhält man $X \vee Y \Leftarrow Y$. Und das ist ein *gültiger* Schluss, entsprechend $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Somit gelten bei $X \vee Y \longrightarrow Y$ genau umgekehrte Verhältnisse wie bei $X \vee Y \Leftarrow Y$. (Von daher könnte man die Grafik auch umkehren).

• synthetisch

Man spricht zwar auch bei der Implikation $X \rightarrow Y$ gerne davon, dass *X in Y enthalten* ist. Aber hier muss man vorsichtig sein, es ist nur ein *empirisches* Enthaltensein möglich. *Logisch* darf man bei $X \rightarrow Y$ im Grunde gar nicht von Enthaltensein sprechen.

Zwar könnte man postulieren, dass bei zwei Variablen X, Y gilt: X ist Y und $\neg Y$ enthalten, und Y ist in X und $\neg X$ enthalten; aber dass *alles in allem* enthalten ist, heißt logisch genau so viel, wie dass *nichts in nichts* enthalten ist.

Abschließend hierzu: Der Begriff des „Enthaltensein“ leistet einiges zur Abgrenzung von synthetisch, analytisch und semi-analytisch, aber alleine reicht er auch nicht aus, zumal die Mengenlehre für quantitative Teilmengen-Relationen nicht wirklich geeignet ist.

4-1-2-3 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Es wurde als These aufgestellt, dass gilt:

Synthetisch:	logisch unabhängig
Semi-analytisch:	partiell abhängig (partiell unabhängig)
Analytisch-tautologisch:	(vollständig) abhängig
Analytisch-kontradiktorisch:	(vollständig) abhängig

Abhängigkeit hängt eng zusammen mit *Enthaltensein*. Wenn X logisch in Y enthalten ist, dann besteht Abhängigkeit. Es lassen sich verschiedene Modelle der Abhängigkeit aufstellen. Auch die theoretische Wahrscheinlichkeit kann dazu dienen, Abhängigkeit quantitativ zu bestimmen. Aber hier kann es zu Problemen kommen.

So gilt: $p^T[X \rightarrow Y] = p^T[X \vee Y \longrightarrow Y] = 3/4$

Das ist aber unbefriedigend, denn dann hätte ja eine *synthetische* Relation den gleichen Abhängigkeits-Wert wie eine *semi-analytische* und könnte so nicht unabhängig sein.

Ich verwende daher die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, bei der man *nur die positiven Fälle* berücksichtigt; die bedingte (theoretische) Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich die Konklusion ist, wenn die Prämisse gültig ist. Es geht also nur darum, die Abhängigkeit der Konklusion von der (positiven) Prämisse abzubilden. Man kann diese Wahrscheinlichkeit auch *logische Wahrscheinlichkeit* nennen. Ich schreibe sie formal p^L.

Sie entspricht allerdings der (analytischen) *Positiv-Implikation*, so dass keine neue Theorie eingeführt werden muss. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber nur bei implikativen Relationen anzugeben.

• synthetisch

	$X \rightarrow Y$
1.	+ + +
2.	+ − −
3.	− + +
4.	− + −

Wenn ich weiß, dass X gültig (+) ist, dann ist Y einmal gültig (+), in der 1. Zeile, und einmal ungültig (–), in der 2. Zeile. Es besteht also eine Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1/2$, das Y gültig ist und ebenfalls 1/2, dass es ungültig ist. $p^T = 1/2$ ist aber genau die *Zufallserwartung*, das zeigt die Unabhängigkeit von X und Y. Um zu prüfen, ob Y (bei gültigem X) ebenfalls gültig ist, muss ich empirische Untersuchungen machen.

Dabei kommen alle Kombinationen von X und Y vor: + +, + –, – +, – –.
Die Fälle von negativem X (–) lasse ich hier einmal beiseite, sie führen durch die Definition der Implikation zu irrelevanten Ergebnisse. Die Betrachtung nur der positiven Fälle entspricht der Positiv-Implikation X *→ Y. $p^T[X \rightarrow Y] = 1/2 = 0{,}5$. Ansonsten schreibt man:

$$p^L[X \rightarrow Y] = 1/2 = 0{,}5$$

• semi-analytisch

Beispiel wieder: $X \vee Y \longrightarrow Y$
Der Wahrheitsverlauf ist hier gleich wie bei X → Y: + – + +, dennoch ergeben sich ganz andere Verhältnisse. Wenn ich hier weiß, dass $X \vee Y$ gültig (+) ist [1., 2., 3. Zeile], dann ist Y 2x ebenfalls gültig (+), nämlich [1. und 3. Zeile]. Es besteht somit eine Wahrscheinlichkeit von $p^L = 2/3$ (0,67), was deutlich über der Zufallserwartung (0,5) liegt. D. h. man kann rein logisch *partielle* Erkenntnisse über Y gewinnen; um aber genau festzustellen, ob (bei gültigem $X \vee Y$) auch Y gültig ist, muss ich dennoch *empirische* Untersuchungen vornehmen. Genau deshalb nenne ich einen solchen Schluss eben *partiell analytisch*.

Dass $X \vee Y$ und Y nicht logisch unabhängig, sondern partiell abhängig sind, zeigt auch, dass in der Wahrheitstafel *nicht alle* Kombinationen auftreten, nämlich nicht:

$X \vee Y$: – und Y: +. Denn: $\neg(X \vee Y)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ Y$ ist eine Kontradiktion.

Ich schreibe: $p^L[X \vee Y \longrightarrow Y] = 2/3$. Auch dabei kann man alternativ wieder die Positiv-Implikation einsetzen: $p^T[X \vee Y \ {*}\!\!\longrightarrow Y] = 2/3$. Hier besteht also der gewünschte Unterschied zwischen $p^T[X \ {*}\!\!\rightarrow Y] = 1/2$ und $p^T[X \vee Y \ {*}\!\!\longrightarrow Y] = 2/3$.

• analytisch

	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
1.	+ + +
2.	− + −
3.	− + +
4.	− + −

Im analytischen-tautologischen Fall gilt: Wenn ich weiß, dass $X \wedge Y$ gültig (+) sind, dann weiß ich sicher, dass auch Y gültig (+) ist, denn es gibt nur *eine* Welt, in der $X \wedge Y$ gültig ist, und in der ist Y auch gültig (1. Zeile). Somit ergibt sich für die theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 1/1 = 1$. (Davon ist unberührt, dass auch die Relation $X \wedge Y \Rightarrow Y$ als ganze eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 4/4 = 1$ besitzt). Man braucht also keine empirischen Untersuchungen, um die Wahrheit von Y zu beweisen. Es genügt, $X \wedge Y$ zu *analysieren*, daher auch der Begriff „*analytische* Relation".

Dass $X \vee Y$ und Y voneinander logisch abhängig sind, zeigt auch, dass in der Wahrheitstafel *nicht alle* Kombinationen auftreten, nämlich nicht: $X \vee Y$: + und Y: –. Denn:

$X \wedge Y \ {}^{-}\!\wedge^{-} \ \neg Y$ ist eine Kontradiktion.

Vielmehr kann man sagen, dass Y *vollständig* abhängig von $X \wedge Y$ ist.

Hier gilt: $p^T[X \wedge Y \Rightarrow Y] = p^L[X \wedge Y \Rightarrow Y] = 1$

Zur Kontradiktion: Da gelten bei der normalen Implikation wie gesagt extreme Verhältnisse. Wir wollen sie nicht weiter analysieren.

Ist die logische *Abhängigkeit* eine Möglichkeit, synthetische, semi-analytische und analytische Relationen voneinander abzugrenzen? Die Frage geht noch weiter: Lässt sich ein *quantitatives* Modell der logischen Abhängigkeit verwenden?

Ich habe hier das Modell der *Positiv-Implikation* bzw. der *bedingten Wahrscheinlichkeit* verwendet. Dies bezieht sich primär nur auf implikative Beziehungen (man könnte es aber ggf. modifiziert auch auf andere Relatoren anwenden).

Allerdings gelingt es damit nicht, *synthetische* und *semi-analytische* Strukturen klar voneinander abzugrenzen: synthetische Relationen haben zwar einen Wert von 0,5, aber semi-analytische Relationen können auch diesen Wert aufweisen, z. B.: $p^L[X *\!\rightarrow (X >< Y)] = 0{,}5$.

Allgemein kann man für p^L festhalten:

Analytisch-tautologisch: 1
Analytisch-kontradiktorisch: 0
Synthetisch: 0,5
Semi-analytisch: verschiedene Werte möglich, 0,75, 0,5, 0,25.

4-1-2-4 ABHÄNGIGKEIT

Man kann aber auch auf andere Weise logische *Abhängigkeit* bestimmen. Es bleibt nämlich das Problem, dass bei einer *Tautologie* $\Phi \Rightarrow \Psi$ die beiden Relata genauso voneinander abhängig sind wie bei einer *Kontradiktion* $\Phi \not\Rightarrow \Psi$.

Die theoretische (oder logische) Wahrscheinlichkeit ist dabei nicht geeignet, denn hier gilt:

p^T (Tautologie) = 1, p^T(Kontradiktion) = 0
die semi-analytischen Relationen liegen dazwischen: $p^T = 0{,}75, 0{,}5, 0{,}25$.

Insofern kann es *keine lineare* Funktion geben. Denn Tautologie und Kontradiktion sind beide vollständig analytisch. Man kann sich das folgendermaßen erklären:
Eine Tautologie gilt für *alle* Welten, also p(Welten) = 1, sie ist deterministisch.
Eine Kontradiktion gilt für *alle* Welten *nicht*, sie ist somit auch deterministisch.

Man kann einen *Grad von logischer Abhängigkeit* konstruieren: p(Abhängigkeit) = p^A.
p^A muss für Tautologie und Kontradiktion den Wert 1 besitzen. Für alle anderen Relationen gilt $p^A < 1$. Man kann das wie folgt berechnen: $p^A = |p^T - (1 - p^T)|$. Und zwar gilt:

- Tautologie: $p^A = |1 - 0| = 1$
- Kontradiktion: $p^A = |0 - 1| = 1$
- semi-analytisch:
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow Y$: $p^A = |0{,}75 - 0{,}25| = 0{,}5$
  zu 3/4 positiv deterministisch, an 4/4 (Tautologie) dran,
  zu 1/4 negativ deterministisch, an Kontradiktion (0/4) dran.
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$: $p^A = |0{,}5 - 0{,}5| = 0$
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow X \nabla Y$: $p^A = |0{,}25 - 0{,}75| = 0{,}5$

Der *quantitative Abhängigkeits-Begriff* p^A ist geeignet, *analytische* und *semi-analytische* Relationen voneinander abzugrenzen. *Synthetische* Relationen muss man allerdings per Definition ausschließen, denn sonst müssten sie alle den Wert $p^A = 0$ besitzen, was sich aber in diesem Modell nicht ergeben würde. Der Vorteil dieses Ansatzes ist vor allem, dass er Tautologie und Kontradiktion *denselben* Wert zumisst (was z. B. bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit nicht gegeben ist).

4-1-2-5 SYNTHETISCH, ANALYTISCH, SEMI-ANALYTISCH

Nach diesen Vorklärungen kann man noch einmal präziser bestimmen:

- *synthetische Strukturen*
    - *syntaktisch*: nur unterschiedliche Objekt-Zeichen rechts und links vom Junktor
    - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: $0 < p^T < 1$
    - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): 0,5
    - *Abhängigkeit*: es besteht keine logische Abhängigkeit, p^A nicht definiert
    - *Enthaltensein*: logisch sind Vorderglied und Nachglied nicht ineinander enthalten

- *analytische Strukturen*
    - *syntaktisch*: rechts und links vom Junktor partiell oder vollständig gleiche Objekt-Zeichen
    - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: von $p^T = 1$ bei Tautologien, $p^T = 0$ bei Kontradiktionen
    - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): $p^L = 1$ bei Tautologien, $p^L = 0$ bei Kontradiktionen
    - *Abhängigkeit*: es besteht grundsätzlich ein logischer Zusammenhang zwischen den Relata: bei Tautologien und Kontradiktionen gleichermaßen $p^A = 1$
    - *Enthaltensein* (bei Implikationen): die Konklusion ist vollständig in der Prämisse enthalten (ein Ausgeschlossensein bei Kontradiktionen)

- *semi-analytische Strukturen*
    - *syntaktisch*: heißt das, dass rechts und links vom Junktor partiell oder vollständig gleiche Objekt-Zeichen stehen
    - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: $0 < p^T < 1$
    - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): $0 < p^L < 1$
    - *Abhängigkeit*: es besteht grundsätzlich ein partieller logischer Zusammenhang zwischen den Relata: $p^A < 1$
    - *Enthaltensein*: ein partielles Enthaltensein

Es bleibt abschließend die Frage, ob man auch den Begriff „analytisch" *quantifizieren* kann, ob man einen *Grad von Analyzität* angeben kann. Es scheint mir berechtigt, eine strikte Grenze zwischen synthetisch, semi-analytisch und analytisch andererseits zu ziehen. Es wäre zwar denkbar, hier fließende Übergänge zu postulieren, aber ist m. E. nicht sinnvoll. Man darf sich eben nicht vom Modell eines *Tautologie-Grades* irritieren lassen, der nicht einen Grad von Analyzität angibt.

4-1-3 Positiv-Implikation

4-1-3-1 TAUTOLOGIE

Z. B. *Modus ponens*
Die *vollständige* Wahrheitstafel lautet:

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+	□	−
−	□	+	−	−	□	+
−	□	−	−	−	□	−

Bei der Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T werden aber nur die unter dem Relator *⇒ stehenden + mitgerechnet, nicht das Symbol □ (für *undefiniert*). Somit erfolgt die Berechnung anhand der *verkürzten* Wahrheitstafel (vgl. 1-1-3-2).

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+		

$p^T[(X \mathbin{*\!\rightarrow} Y) \wedge X \;\; {*\!\Rightarrow}\;\; Y] = 1/1 = 1$

Dies entspricht wie beschrieben der *bedingten theoretischen Wahrscheinlichkeit*.

4-1-3-2 KONTRADIKTION

Kontradiktionen sind bei der Positiv-Implikation viel eher möglich als bei der Normal-Implikation.

Kontradiktionen ergeben sich bei:

- Tautologie ⇏ Kontradiktion: $^{+}\Phi^{+} \; {*\!\nRightarrow} \; ^{-}\Psi^{-}$
- Position ⇏ Negation: $\Phi \; {*\!\nRightarrow} \; \neg\Phi$, $\neg\Phi \; {*\!\nRightarrow} \; \Phi$
- Relation *⇏ (negative) Folge: $\Phi \; {*\!\nRightarrow} \neg\Psi$ (wenn gilt $\Phi \Rightarrow \Psi$)

Z. B.:

- $p^T[(X \; ^{+}\!\vee^{+} \neg X) \;\; {*\!\nRightarrow} \;\; (X \; ^{-}\!\wedge^{-} \neg X] = 0/4 = 0$
- $p^T[(X \; {*\!\rightarrow} \; Y) \;\; {*\!\nRightarrow} \;\; \neg(X \;\; {*\!\rightarrow} \; Y)] = 0/1 = 0$
- $p^T[X \;\; {*\!\nRightarrow} \;\; (X \;\nabla\; Y)] = 0/2 = 0$ Denn $p^T[X \;\; {*\!\Rightarrow} \;\; \neg(X \;\nabla\; Y)] = 2/2 = 1$

4-1-3-3 SEMI-ANALYTISCHE POSITIV-IMPLIKATION

Die semi-analytische Positiv-Implikation wirft einige Probleme auf.

Z. B.

(X	∨	Y)	*⟶	Y
+	+	+	+	+
+	+	−	−	−
−	+	+	+	+
−	−	−	□	−

Hier gilt also: $p^T[(X \vee Y) \ {*}\!\longrightarrow Y] = 2/3$
Im Gegensatz zur herkömmlichen Implikation:
Denn bei der gilt wie schon erläutert: $p^T[(X \vee Y) \longrightarrow Y] = 3/4$

Problematisch ist aber eine semi-analytische Relation wie:

(X	→	Y)	*⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	+	+	?	−	□	+
−	+	−	?	−	□	−

Hier scheint sich ein Wert $p^T = 1/1 = 1$ zu ergeben, und das ist nach der Primär-Deutung der Positiv-Implikation *→ falsch, denn danach handelt es sich um eine *semi-analytische* Relation.

Eine vollständig ausgearbeitete Lösung steht noch aus. Vermutlich liegt die Lösung aber darin, dass man für die Berechnung das Symbol ? (für „unbestimmt“) mitrechnen muss, im Gegensatz zu dem Symbol □ (für „undefiniert“). Dann erhält man in diesem Fall folgenden Wert:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) \ {*}\!\longrightarrow (X \ {*}\!\rightarrow Y)] = 1/3$$

4-1-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

Z. B.:

(X	*→	Y)	*⇔	¬(	X	*→	¬	Y)
+	+	+	+	+	+	+	−	+
+	−	+	□	−	+	−	+	−
−	□	+	□	□	−	□	−	+
−	□	−	□	□	−	□	+	−

$$p^T[(X \ {*}\!\rightarrow Y) \ {*}\!\Leftrightarrow \neg(X \ {*}\!\rightarrow \neg Y)] = 1/1 = 1$$

Entsprechend gilt:

$$p^T[\neg(X \ {*}\!\rightarrow Y) \ {*}\!\Leftrightarrow (X \ {*}\!\rightarrow \neg Y)] = 1$$

4-1-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

(X	*→	Y)	*⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	□	+	□	−	+	+
−	□	−	□	+	+	−

$$p^T[(X \ {*}\!\rightarrow Y) \ {*}\!\Rightarrow (X \rightarrow Y)] = 1$$

Bei s*emi-analytischen* Relationen ergeben sich z. B. folgende quantitative Unterschiede:

	$X \vee Y \longrightarrow Y$			$p^T[X \vee Y \longrightarrow Y] = 3/4 = 0{,}75$
1.	+	+	+	
2.	+	−	−	
3.	+	+	+	
4.	−	+	−	

	$X \vee Y \ {*}\!\!\longrightarrow Y$			$p^T[X \vee Y \ {*}\!\!\longrightarrow Y] = 2/3 = 0{,}67$
1.	+	+	+	
2.	+	−	−	
3.	+	+	+	
4.	−	□	−	

Kontradiktion. Hier ergeben sich die deutlichsten Unterschiede:

Normale Implikation	p^T	Positiv-Implikation	p^T
$X \longrightarrow \neg X$:	$2/4 = 0{,}5$	$X \ {*}\!\!\nRightarrow \neg X$:	0
$\neg X \longrightarrow X$:	$2/4 = 0{,}5$	$\neg X {*}\!\!\nRightarrow X$:	0

4-1-4 Systematik

Anhand ausgesuchter Relatoren, die eine *strukturelle* theoretische Wahrscheinlichkeit von 3/4 (= 0,75), 2/4 (= 0,5) oder 1/4 (= 0,25) haben, sollen *Beispiele* für eine theoretische Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1$, $p^T = 0$ und $0 < p^T < 1$ gegeben werden.

4-1-4-1 KONJUNKTION

Tautologie $p^T[(X \vee \neg X)\ {}^{+}\!\wedge^{+}\ (Y \vee \neg Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch $p^T[(X \mid Y)\ {}^{+}\!\wedge^{-}\ (X \rightarrow Y)] = 2/4 = 0{,}5$

Kontradiktion $p^T[(X \nabla Y)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ (X >< Y)] = 0/4 = 0$

4-1-4-2 ÄQUIVALENZ

Tautologie $p^T[X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch $p^T[(X \vee Y) \longleftrightarrow (X \mid Y)] = 3/4 = 0{,}75$

Kontradiktion $p^T[X \wedge Y \nLeftrightarrow X \mid Y] = 0$

4-1-4-3 REJEKTION
Die Rejektion $X \nabla Y$ steht für „nicht X und nicht Y“.

Tautologie	$p^T[(X \wedge \neg X)\ {}^{+}\nabla^{+}\ (Y \wedge \neg Y)] = 4/4 = 1$
Semi-analytisch	$p^T[(X \wedge Y)\ {}^{+}\nabla^{-}\ (X \vee Y)] = 1/4 = 0,25$
Kontradiktion	$p^T[(X \nabla Y)\ {}^{-}\nabla^{-}\ (X \vee Y)] = 0/4 = 0,0$

4-1-4-4 REPLIKATION

Tautologie	$p^T[(X \rightarrow X) \Leftarrow (X \leftrightarrow Y)] = 4/4 = 1$
Semi-analytisch	$p^T[(X \rightarrow Y) \longleftarrow (X \leftarrow Y)] = 3/4 = 0,75$
Kontradiktion	$p^T[(X \wedge \neg X) \not\Leftarrow (Y \vee \neg Y)] = 0/4 = 0$

4-1-4-5 RELATIONEN MIT MEHR ALS ZWEI VARIABLEN
Bisher habe ich immer 2 Variablen verwendet, jetzt sollen 3 oder 4 Variablen genommen werden X, Y, Z bzw. X, Y, V, W. Die folgenden Werte lassen sich anhand der *Wahrheitstafeln* berechnen, was hier aber nicht ausgeführt werden soll.

- 3 Variablen

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (X \rightarrow Z)] = 8/8 = 1$

$p^T[(X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow (X \vee Y \vee Z)] = 8/8 = 1$

- 4 Variablen

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longleftrightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (V \wedge W)] = 12/16 = 3/4 = 0,75$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longrightarrow (X \leftarrow Y) \vee (V \leftarrow W)] = 15/16 = 0,94$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \Rightarrow (X \rightarrow Y) \vee (V \rightarrow W)] = 16/16 = 1$

4-1-5 Erweiterungen

Hier soll es um M*odalität* gehen. Die eigentliche, *alethische* Modal-Logik behandelt die Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Operatoren wie: *notwendig*, *möglich*, *nicht notwendig*, *nicht möglich* u. ä.

Wie ich schon gezeigt habe, ist die Modal-Logik auf eine *normale* Logik zurückzuführen. Allerdings lässt sich auf der *Aussagen-Logik* ausschließlich eine Modal-Logik aufzubauen, die nur *zwei* Werte unterscheidet: „*notwendig*“ und „*unmöglich*“ (bzw. „notwendig, dass nicht“). Für Einbeziehung von „möglich“ und „möglich, dass nicht“ benötigt man die *Quantoren-Logik* oder eine höhere, *quantitative* Logik, wie sie in diesem Buch vorgestellt wird.

Im vorliegenden Kapitel über Aussagen-Logik beschränke ich mich daher auf die Analyse der Modal-Werte „notwendig“ und „unmöglich“. Dabei kann man die modal-logischen Werte mittels der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T quantifizieren, ja diese quantitativen Werte zur Definition verwenden.

Und zwar gilt folgende Entsprechung:

Notwendig (N) = tautologisch $p^T = 1$ bzw. $w^T = 1$
Unmöglich (U) = kontradiktorisch $p^T = 0$ bzw. $w^T = 1$

Notwendig ist somit eine Relation, die *sicher* ist, deren Gültigkeit 100%ig zu erwarten ist, die andererseits keine Information beinhaltet.
Unmöglich ist eine Relation, die mit 0% zu erwarten ist, deren Ungültigkeit somit sicher ist.

Man kann unterscheiden *absoluter* und *relativer* Modalität.

Absolut: eine logische Relation ist *für sich* tautologisch bzw. kontradiktorisch
Relativ: eine logische Relation (bzw. ein logischer Ausdruck) ist *in Beziehung* zu einer anderen Relation tautologisch bzw. kontradiktorisch, konkret sie ist *logische Folge* oder kontradiktorische „Folge" der anderen Relation.

• *Notwendigkeit* (Tautologie)
- absolut
z. B.: $X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X$ Notwendig($X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X$) $p^T[X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X] = 1$
Hier kann man auch nur schreiben ‘Notwendig($X \vee \neg X$)’, denn durch den Modal-Ausdruck „notwendig" wird bereits ausgedrückt, dass eine Tautologie vorliegt.
Allgemein: notwendig(Φ) $=_{df}$ $p^T[^{+}\Phi^{+}] = 1$ oder einfacher $p^T[\Phi] = 1$ (vgl. unten)
- relativ
z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$ Notwendig($Y, X \wedge Y$) $p^T[Y, X \wedge Y] = 1$
Hier bietet sich die *Implikation* oder die *Positiv-Implikation* an, z. B.:
$p^T[X \wedge Y \Rightarrow Y] = 1$
Allgemein: notwendig(Ψ, Φ) $=_{df}$ $p^T[\Phi \Rightarrow \Psi] = 1$

• *Unmöglichkeit* (Kontradiktion)
Man kann Unmöglichkeit als „notwendig nicht" oder „nicht möglich" darstellen, aber ich verwende hier zur Einfachheit keinen abgeleiteten Begriff.
- absolut
z. B. $X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ Unmöglich($X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X$) $p^T[X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X] = 0$
Allgemein: unmöglich(Φ) $=_{df}$ $p^T[^{-}\Phi^{-}] = 0$
- relativ
z. B.: $(X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) \nRightarrow (X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$
Unmöglich[$(X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X), (X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X)$] $p^T[(X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X), (X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X)] = 0$
z. B. $p^T[(X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) \nRightarrow (X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X)] = 0$

Die Bestimmung des *relativen* „Unmöglich" mittels der normalen Implikation ist nicht sehr überzeugend, denn $X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ ist ja bereits *absolut* unmöglich (weil kontradiktorisch), es ist wenig informativ, dass es zusätzlich auch noch *relativ* unmöglich ist. Verwendet man aber die *Positiv-Implikation*, ergibt sich ein anderes Bild. Man bestimmt nämlich „Unmöglich(Ψ)" über (Φ *$\Rightarrow \neg\Psi$) bzw. (Φ *$\nRightarrow \Psi$). Somit: Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df}$ Φ *$\nRightarrow \Psi$

Mit Verwendung von p^T: Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df}$ $p^T[\Phi$ *$\nRightarrow \Psi] = 0$

z. B. : *Unmöglich(Y, (X *$\rightarrow \neg$Y) $\wedge$ X) $\Leftrightarrow$ ((X *$\rightarrow \neg$Y) $\wedge$ X) *$\nRightarrow$ Y

mit p^T: *Unmöglich(Y, (X *$\rightarrow \neg$Y) $\wedge$ X) $\Leftrightarrow$ p^T[((X *$\rightarrow \neg$Y) $\wedge$ X) *$\nRightarrow$ Y] = 0

4 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

4-2-1 Einführung

Ich will in 4-2, wie schon manchmal zuletzt und auch zukünftig, partiell auf eine *numerische Differenzierung* der *Unterkapitel* (z. B. in 4-2-1-1- bis 4-2-1-5) verzichten, wenn der Inhalt es nicht erforderlich macht, weil der Text nicht zu sehr ausgedehnt werden soll.

4-2-2 Implikation

4-2-2-1 EINFACHE TAUTOLOGIEN

Einfache Relationen sind solche, in denen – grammatisch gesprochen – nur *eine* Prädikat-Variable vorkommt, z. B. Fx mit der Prädikatvariable ‚F'.

Generell gilt für die tautologische Implikation: $p^T[\Phi \Rightarrow \Psi] = 1$.

Ich nehme hier das Beispiel des *Schlusses* von „alle": Λ auf „einige": V.

• *Quantoren-logisch*: $p^T[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] = 1$

• *Prädikaten-logisch*: $p^T[(Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n) \Rightarrow (Fx_1 \vee ... \vee Fx_n] = (2/2)^n = 1$

Die *Berechnung von p^T* sei am Beispiel n = 2 (mit x_1, x_2) – mittels der *Wahrheitstafel* – veranschaulicht. Auch bei den folgenden Fällen werde ich die Tabellen-Wahrheitstafel nutzen.

	Fx_1	$\wedge$	Fx_2	$\Rightarrow$	Fx_1	$\vee$	Fx_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	–	–	+	+	+	–
3	–	–	+	+	–	+	+
4	–	–	–	+	–	–	–
		1+		4+		3+	

Hier gilt: $p^T[(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2] = (2/2)^n = (2/2)^2 = 4/4 = 1$

4-2-2-2 KOMPLEXE TAUTOLOGIEN

Komplexe Relationen sind solche, in denen, grammatisch gesprochen, mindestens *zwei* Prädikatvariablen vorkommen, z. B. ‚F' und ‚G' (außerdem außen-logische Relatoren wie $\rightarrow$).

Ich nehme hier das Beispiel des Schlusses von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ auf $Vx(Fx \rightarrow Gx)$.

• *Quantoren-logisch*: $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1$

• *Prädikaten-logisch*:
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = (4/4)^n = 1$
Die *Berechnung von p^T* sei wieder am Beispiel n = 2 (mit x_1, x_2) veranschaulicht:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)]$, für n = 2 (vereinfacht)

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\Rightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	–	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	+	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	+	–	+	+
8	+	–	–	–	–	+	–	+	+	–	–	+	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	+	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–	+	–	+	–	+	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
				9+				16+				15+			

Prädikaten-logisch (konkret bei n = 2)
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (4/4)^2 = 16/16 = 1$

Quantoren-logisch (generell und konkret bei n = 2)
Hier werden, wie auch bei den folgenden Beispielen, zusätzlich die p^T-Werte für die *synthetischen Teil-Relationen* und für den Schluss mit der *Positiv-Implikation* $*\Rightarrow$ angegeben.

– synthetisch:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3/4)^n$	$= (3/4)^2$	= 9/16	= 0,56
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (4^n - 1)/4^n$	$= (4^2 - 1)/4^2$	= 15/16	= 0,94

– analytisch:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (4/4)^n$	$= (4/4)^2$	= 16/16	= 1
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3/3)^n$	$= (3/3)^2$	= 9/9	= 1

Die *Dezimal-Werte* sind immer auf *2* (zwei) Stellen nach dem Komma *gerundet*.

Auf die Werte für die *Positiv-Implikation* $*\Rightarrow$ wird gesondert noch näher eingegangen.
Es mag irritieren, dass man z. B. $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$ eine Formel mit ‚n' zuordnet, obwohl ‚n' in dem logischen Ausdruck gar nicht vorkommt. Man muss für Λ(alle) hier n/n einsetzen.

4-2-2-3 SEMI-ANALYTISCH: UMKEHRSCHLUSS

Ich habe eben den *strengen* Schluss „alle ⇒ einige" behandelt. Jetzt geht es um den *Umkehr-Schluss* „einige ⟶ alle", der aber nur *semi-analytisch* gilt.

• *Einfache* Relationen
„Wenn *einige* Objekte x die Eigenschaft F haben, dann haben *alle* x die Eigenschaft F".

$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$

Dieser Schluss ist nicht kontradiktorisch, aber offensichtlich auch nicht streng folgerichtig, daher gilt grundsätzlich die theoretische Wahrscheinlichkeit: $0 < p^T < 1$.

$p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] > 0 \wedge < 1$

Man kann p^T auch *genauer* berechnen, wenn man – wie schon beschrieben – eine prädikatenlogische Umformung vollzieht: $p^T [(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$

Als Beispiel wieder n = 2.

	Fx_1	$\vee$	Fx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Fx_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	–	–	+	–	–
3	–	+	+	–	–	–	+
4	–	–	–	+	–	–	–
		3+		2+		1+	

Konkret gilt bei n = 2: $p^T [(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)] = 1/2^{2-1} = 1/2 = 0{,}5$

Die Formel $1/2^{n-1}$ gibt allerdings den *gekürzten* Wert wieder. Wie man an obiger Wahrheitstabelle sieht, ist der reale, ungekürzte Wert $p^T = 2/4$.

• *Komplexe Relationen*
Hier lautet der Umkehrschluss:
Quantoren-Logik: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Ich berechne p^T wieder am Beispiel n = 2:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	+	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	+	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	–	–	+	+
8	+	–	–	+	–	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	+	+	–	–	–	–	+	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
				15+				10+				9+			

Prädikaten-logisch (konkret bei n = 2)

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] =$

$(3^2 + 1)/ 4^2 = 10/16 = 5/8 = 0{,}63$

Quantoren-logisch (allgemein und konkret bei n = 2)

– synthetisch:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (4^n - 1)/4^n$	$= (4^2 - 1)/4^2$	$= 15/16 = 0{,}94$
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3/4)^n$	$= (3/4)^2$	$= 9/16 = 0{,}56$

– analytisch:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3^n + 1)/4^n$	$= (3^2 + 1)/4^2$	$= 10/16 = 0{,}63$
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= 3^n/(4^n - 1)$	$= 3^2/(4^2 - 1)$	$= 9/15 = 0{,}60$

4-2-2-4 SEMI-ANALYTISCH: EXTRA

Hier geht es wiederum um den Schluss von „alle“ auf „einige“, aber in einer anderen, nämlich der allgemein verbreiteten Formalisierung, mit der *Konjunktion* beim *Partikulär*-Satz:

Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$

Es wurde schon gezeigt, dass hier *kein strenger Schluss* vorliegt. Somit gilt:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] > 0 \wedge < 1$

Prädikaten-Logik:

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

Auch hier soll p^T wieder am Beispiel n = 2 hergeleitet werden:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–
5	+	–	–	–	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	+	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	–	+
8	+	–	–	–	–	+	–	+	+	–	–	–	–	–	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–	+	–	–	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+	–	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+	–	–	–	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–
				9+				12+				7+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)] = (4^2 - 2^2)/4^2 = 12/16$

Quantoren-logisch (allgemein und konkret bei n = 2):
– *Synthetisch*

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3/4)^n$	$= (3/4)^2$	= 9/16	= 0,56
$p^T[Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (4^n - 3^n)/4^n$	$= (4^2 - 3^2)/4^2$	= 7/16	= 0,44

– *Analytisch*

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (4^n - 2^n)/4^n$	$= (4^2 - 2^2)/4^2$	= 12/16	= 0,75
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (3^n - 2^n)/3^n$	$= (3^2 - 2^2)/3^2$	= 5/9	= 0,56

Dieser Fall ist besonders interessant. Denn in der hier gezeigten Weise werden *All-Sätze* und *Existenz-Sätze* meistens formalisiert; es geht um das Modell 4 (vgl. 1-2-3-4 u. a.)

Es zeigt sich, dass bei dieser Formalisierung aus „alle F sind G" nicht sicher folgt „einige F sind G", obwohl dies i. allg. als sichere Folge, als gültiger Schluss gilt.

Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses hoch: Schon bei n = 2 ist $p^T = 0{,}75$ und *steigt* mit steigendem n:

bei n = 3	$p^T = 56/64 = 0{,}88$
bei n = 4:	$p^T = 240/256 = 0{,}94$
bei n = 5	$p^T = 992/1024 = 0{,}97$
bei n = 6	$p^T = 4032/4094 = 0{,}98$
bei n = 7	$p^T = 16256/16384 = 0{,}99$

4-2-2-5 KONTRADIKTION

Auf die komplizierte Situation der *Kontradiktion* bei der Implikation bin ich schon ausführlich eingegangen. Hier gilt ausschließlich: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Natürlich gilt dies auch für die Quantoren-Logik, z. B.:

$p^T[\Lambda x(Fx \vee \neg Fx) \not\Rightarrow Vx(Fx \wedge \neg Fx)] = 0$

4-2-3 Positiv-Implikation

4-2-3-1 TAUTOLOGIE

Es wurden oben schon Beispiele für Berechnungen der p^T bei der *Positiv-Implikation* gebracht, im Vergleich zum Wert der *normalen* Implikation.

Wählen wir auch hier das Beispiel: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$

In *prädikaten-logischer* Formalisierung:

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) *\!\!\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Berechnen wir als Beispiel wieder *prädikaten-logisch* n = 2.

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) *\!\!\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$

Bei der Positiv-Implikation werden nur die Welten berücksichtigt, in denen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ *gültig* (+) ist.

Konkret werden also nur die *Welten* bzw. Zeilen berücksichtigt, bei denen in der Wahrheitstafel unter dem $\wedge$ das Zeichen + steht. Bei den anderen Welten wird das Feld unter dem $*\!\!\Rightarrow$ leergelassen (man könnte auch □ für „nicht definiert" hinschreiben).

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$*\Rightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−		+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	−	+	+	+		+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−		+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+		+	−	−	+	−	+	+
8	+	−	−	−	−	+	−		+	−	−	+	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−		−	+	+	+	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−		−	+	−	+	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				9+				9+				15+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) *\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (3/3)^2 = 9/9 = 1$

Quantoren-logisch (allgemein):
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (3/3)^n = 1$

4-2-3-2 TAUTOLOGIE EXTRA

Im obigen Fall habe ich *nur* als *Zentral-Relator* die *Positiv-Implikation* verwendet. Man könnte sie aber auch *in jedem Fall* verwenden (= *strikte* Positiv-Implikation). Dann folgt:

- *Quantoren-logisch*: $\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx *\rightarrow Gx)$
- *Prädikaten-logisch*:

$(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n *\rightarrow Gx_n) *\Rightarrow (Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n *\rightarrow Gx_n)$

Berechnet man wieder n = 2, dann bleibt in der Tabelle nur *ein einziger* Fall übrig.
In der folgenden Tabelle gebe ich auch nur diesen Fall an, alle *negativen* werden gestrichen.

	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2	$*\Rightarrow$	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Alle anderen Möglichkeiten fallen heraus, weil gilt:
Fx_1 ist ungültig oder Fx_2 ist ungültig oder $(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\rightarrow Gx_2)$ ist ungültig, also:

$\neg(Fx_1) \vee \neg(Fx_2) \vee \neg[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\rightarrow Gx_2)]$

Daraus folgt für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T:

- *Prädikaten-logisch* (konkret für n = 2):
  $p^T[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\rightarrow Gx_2) *\Rightarrow (Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\rightarrow Gx_2)] = (1/1)^2 = 1/1 = 1$
- *Quantoren-logisch* (allgemein): $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx *\rightarrow Gx)] = (1/1)^n = 1$

4-2-3-3 SEMI-ANALYTISCHER UMKEHRSCHLUSS

Es geht um den *Umkehrschluss* zu 4-2-3-2, zunächst als generelle, *strikte* Positiv-Implikation.

• Strikte Positiv-Implikation (nur Verwendung der Positiv-Implikation)
Hier lautet der Umkehrschluss:
quantoren-logisch: $Vx(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$
prädikaten-logisch:

$$(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n *\!\rightarrow Gx_n) *\!\longrightarrow (Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)$$

Ich berechne p^T wieder am Beispiel n = 2:

	Fx_1	$*\!\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$*\!\rightarrow$	Gx_2	$*\!\longrightarrow$	Fx_1	$*\!\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$*\!\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–
5	+	–	–	+	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+
				3+				1+				1+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) *\!\longrightarrow (Fx_1 *\!\rightarrow Gx_2) \wedge (Fx_n *\!\rightarrow Gx_2)] =$$
$$1/(2^2 - 1) = 1/(4 - 1) = 1/3$$

Quantoren-logisch (allgemein): $p^T[Vx(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)] = 1/(2^n - 1)$

• partielle Positiv-Implikation (Positiv-Implikation nur als *Zentral-Relator*)
Hier lautet der Umkehrschluss wie folgt:
Quantoren-logisch: $Vx(Fx \rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-logisch:
$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n) *\!\longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$*\!\longrightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	+	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	□	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	–	–	+	+
8	+	–	–	+	–	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	+	+	–	–	–	–	+	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
				15+				9+				9+			

Hier steht nur *ein* – unter dem $\vee$, und zwar in der 6. Zeile, die daher als *nicht definiert* (□) gilt.
So ergibt sich ein Resultat, das dem bei der *normalen Implikation* sehr ähnlich ist:
dort ist $p^T = 10/16$, hier ist $p^T = 9/15$.

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \ast\!\!\longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] =$$
$$3^2/(4^2 - 1) = 9/(16 - 1) = 9/15 = 0{,}6$$

Quantoren-logisch (allgemein): $p^T[\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) \ast\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 3^n/(4^n - 1)$

4-2-3-4 SEMI-ANALYTISCH EXTRA

Hier wird wieder die *gebräuchlichste Formalisierung* für den Schluss von „alle" auf „einige" verwendet, mit der *Konjunktion* beim Partikulär-Satz $\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$:

Quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ast\!\!\longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$

Prädikaten-logisch:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \dots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \ast\!\!\longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \dots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$$

Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T bzw. des *Grades der logischen Folge* wiederum am Beispiel n = 2. Ich lösche alle *nicht definierten* Zeilen bzw. Relationen.

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ast\!\!\longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\ast\!\!\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2															
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–
5															
6															
7															
8															
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+	+
10															
11	–	+	+	+	–	+	+	–	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+	–	–	–	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	+
14															
15	–	+	–	+	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–
				9+				5+				5+			

prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \ast\!\!\longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)]$$
$$= (3^2 - 2^2)/3^2 = (9 - 4)/9 = 5/9 = 0{,}56.$$

quantoren-logisch (allgemein): $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ast\!\!\longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)] = (3^n - 2^n)/3^n$

Wie gesagt gilt für den Schluss von „alle" auf „einige":

Erstens, er wird üblicherweise formalisiert als: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$
Zweitens, er gilt als strenger Schluss, also mit $\Rightarrow$.
Aber ich habe gezeigt, dass dieser Schluss mit der *normalen Implikation* nicht gültig ist; und wie sich jetzt zeigt, ist er auch mit der Positiv-Implikation nicht streng gültig. Es handelt sich nur um einen *semi-analytischen* Schluss.

4-2-3-5 KONTRADIKTION
Bei der Kontradiktion ergibt sich immer $p^T = 0$. Bei der *normalen* Implikation gibt es nur *eine* Kontradiktion im extremen Fall: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Bei der *Positiv*-Implikation gibt es dagegen (wie beschrieben) verschiedene Möglichkeiten der Kontradiktion, etwa Position $*\not\Rightarrow$Negation. Daher ist es auch leicht, ein Beispiel zu geben, z. B. der Schluss von „alle" auf „nicht alle".

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 0$$

4-2-4 Systematik

Es werden hier nur *ausgewählte Beispiele* gebracht, um den Text nicht zu umfangreich zu gestalten. Dabei wird immer die einfachere *quantoren-logische* Form verwendet (anstatt der *prädikaten-logischen* Form).
Und es sei daran erinnert, dass gilt: Λ(alle) = n/n. „Alle" kann also sein:
1/1 (einer von einem), 2/2 (zwei von zwei), 3/3 (drei von drei), 4/4, 5/5, 6/6, 7/7 usw. usw.

4-2-4-1 EINFACHE TAUTOLOGIE

$$p^T = (2/2)^n = 1$$

- $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
- $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

- $\neg Vx\neg(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda\neg(Fx)$
- $\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda(Fx)$

4-2-4-2 KOMPLEXE TAUTOLOGIE

$$p^T = (4/4)^n$$

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg Vx(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge Gx)$

4-2-4-3 EINFACH SEMI-ANALYTISCH

$$p^T = 1/2^{n-1}$$

- $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$

- $\mathrm{V}x\neg(Fx) \longrightarrow \Lambda x\neg(Fx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx) \longrightarrow \neg\mathrm{V}x\neg(Fx)$
- $\neg\Lambda(Fx) \longrightarrow \neg\mathrm{V}x(Fx)$

4-2-4-4 KOMPLEX SEMI-ANALYTISCH

$p^T = (3^n + 1)/4^n$

- $\mathrm{V}x(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
- $\mathrm{V}x(Fx \to \neg Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx) \longrightarrow \neg\mathrm{V}x\neg(Fx \to Gx)$
- $\neg\Lambda x\neg(Fx \to \neg Gx) \longrightarrow \neg\mathrm{V}x\neg(Fx \to \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg\Lambda x(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

- $\Lambda x(Fx \to Gx) \longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$
- $\Lambda x(Fx \to \neg Gx) \longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg\mathrm{V}x\neg(Fx \to Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg\mathrm{V}x\neg(Fx \to \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

4-2-4-5 VERGLEICH VON IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLKATION

	Implikation	Positiv-Implikation
• einfach	$\Lambda x(Fx) \Rightarrow \mathrm{V}x(Fx)$ $p^T = (2/2)^n = 1$	$\Lambda x(Fx)\ {*}{\Rightarrow}\ \mathrm{V}x(Fx)$ $p^T = (1/1)^n = 1$
	$\mathrm{V}x(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/2^{n-1}$	$\mathrm{V}x(Fx)\ {*}{\longrightarrow}\ \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/(2^n - 1)$
• komplex	$\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \to Gx)$ $p^T = (4/4)^n = 1$	$\Lambda x(Fx \to Gx)\ {*}{\Rightarrow}\ \mathrm{V}x(Fx \to Gx)$ $p^T = (3/3)^n = 1$
	$\Lambda x(Fx \to Gx) \longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (4^n - 2^n)/4^n$	$\Lambda x(Fx \to Gx)\ {*}{\longrightarrow}\ \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (3^n - 2^n)/3^n$
	$\mathrm{V}x(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$ $p^T = (3^n + 1)/4^n$	$\mathrm{V}x(Fx \to Gx)\ {*}{\longrightarrow}\ \Lambda x(Fx \to Gx)$ $p^T = 3^n/(4^n - 1)$

4-2-5 Erweiterungen

4-2-5-1 INKLUSIVE MODAL-LOGIK
Ich habe schon mehrfach auf die Verbindungen von *Quantoren-Logik* und *Modal-Logik* hingewiesen. Es lassen sich entsprechend auch Verbindungen zur *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T herstellen. Und zwar gilt (für eine *inklusive* Modal-Logik):

Quantoren	Modalität	p^T
• alle	notwendig	1
• nicht alle	nicht notwendig	< 1
• einige	möglich	> 0
• nicht einige	nicht möglich	0

Man könnte entsprechend zu p^T einen Wert *p(modal)*: p^M einführen. Dieser gibt dann den *Grad der Modalität* an, am besten sagt man, den *Grad der Notwendigkeit*. Andererseits ist ein solcher zusätzlicher Wert auch verzichtbar, denn offensichtlich gilt: $p^M = p^T$

Z. B. $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$.

Dieser Schluss ist, wie ausführlich erläutert, nicht notwendig (nicht tautologisch) und nicht unmöglich (nicht kontradiktorisch). Man kann ihn aber in Abhängigkeit von *n* genauer bestimmen.

Ich hatte gezeigt, das gilt:

quantoren-logisch: $p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] = 1/2^{n-1}$ bzw.

prädikaten-logisch: $p^T[(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$
z. B. $p^T[(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)] = 1/2^{2-1} = 1/2$

Dafür kann man auch sagen: ‚Der *Notwendigkeits-Grad* von $(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)$ beträgt 1/2’. Oder: ‚$Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)$ ist zu 50% notwendig’.

Es geht hier nur um eine *logische* (analytische) Bestimmung von Notwendigkeit usw. Man könnte Modal-Begriffe zwar auch *empirisch* begründen, z. B. im Hinblick auf *Kausalität*. Aber auch dann bleibt die logische Bestimmung fundamental.

4-2-5-2 EXKLUSIVE MODAL-LOGIK
Die *exklusive* Modal-Logik bestimmt „möglich“ als „*genau* möglich“, es schließt somit „notwendig“ aus. D. h. konkret: p^T[genau möglich] $< 1 \wedge > 0$. Anders formuliert:

$0 < p^T$[genau möglich] < 1

Wir hatten oben folgenden Schluss vorgeführt:

$p^T[\exists x(Fx \wedge Gx)] \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (4/4)^n = 1$

Modal-logisch wäre allgemein zu formulieren: Aus „genau möglich“ folgt notwendig „möglich“, es folgt also mit einem *Notwendigkeits-Grad* von $p^M = 1$.

4-2-5-3 ZEIT
Es wurde schon gezeigt, dass man vor allem die Quantoren-Logik auf die Dimension *Zeit* anwenden kann. Natürlich lässt sich dann auch p^T zuordnen. Allerdings geht es im Unterschied zur Modalität hier erst einmal um die *empirische* Wahrscheinlichkeit p, nicht um die *theoretische* p^T. Dabei gibt es folgende Entsprechungen:

Quantoren	Zeit	p
• alle	immer	1
• nicht alle	nicht immer	< 1
• einige	manchmal	> 0
• nicht einige	nicht manchmal	0

Generell kann man hier z. B. folgende „Zeit-Schlüsse“ aufstellen bzw. folgende Werte von p^T feststellen:

p^T[immer $\Rightarrow$ manchmal] = 1

$0 < p^T$[nicht immer $\longrightarrow$ manchmal] < 1

Genauer kann man etwa folgendermaßen berechnen:
Es gilt quantoren-logisch: $p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = (3^n + 1)/ 4^n$

Man kann *zeit-logisch* umformulieren: $p^T[Vt(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda t(Fx \rightarrow Gx)] = (3^n + 1)/ 4^n$
Soll heißen: Wenn für *einige* Zeitpunkte (t) gilt: $Fx \rightarrow Gx$, dann gilt auch für *alle* Zeitpunkte (t): $Fx \rightarrow Gx$ mit der Wahrscheinlichkeit $(3^n + 1)/ 4^n$.
Angenommen, alle Zeitpunkte sind n = 10, dann ist $p^T = (3^{10} + 1)/ 4^{10}$

4-2-5-4 RAUM
Bei der Dimension *Raum* ergeben sich im Grunde dieselben Verhältnisse wie bei der Dimension *Zeit*:

Quantoren	Raum	p
• alle	überall	1
• nicht alle	nicht überall	< 1
• einige	mancherorts	> 0
• nicht einige	nirgends	0

Hier gilt „raum-logisch“ z. B.:

p^T[überall $\Rightarrow$ mancherorts] = 1

p^T[nirgends $\Rightarrow$ nicht überall] = 1

4-2-5-5 KAUSALITÄT
Auch *kausal* kann man ähnliche Strukturen aufweisen:
Eine (vollständige) Ursache enthält *alle* Kausalfaktoren.
Eine Teil-Ursache enthält (mindestens) *einige* Kausalfaktoren.
Dann gilt z. B.

p^T[Ursache $\Rightarrow$ Teilursache] = 1

Oder etwas ausführlicher:

p^T[Φ ist Ursache von Ψ $\Rightarrow$ Φ ist (mindestens) Teilursache vonΨ] = 1

Auf *synthetisch-logische* Strukturen der Kausalität wurde bereits eingegangen.

4 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

4-3-1 Einführung

Ich werde mich in diesem Unter-Kapitel 4-3 vorwiegend mit *Schlüssen* beschäftigen, mit dem *Grad ihrer Folgerichtigkeit*, und zwar primär unter Verwendung der *Positiv-Implikation*.

Bei der Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T eines Schlusses sind verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Ich erläutere das am Beispiel des *semi-analytischen* Schlusses $p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = r/n$. Betrachten wir zunächst die *aussagen-logische*, qualitative Struktur des Schlusses, nämlich:

X	∨	Y	⟶	X	∧	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	+	–	–	+	–	–
–	+	+	–	–	–	+
–	–	–	+	–	–	–

Strukturell hat $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ eine *theoretische* Wahrscheinlichkeit $p^T = 2/4 = 1/2 = 0{,}5$. Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ bzw. $\Phi \rightarrow \Psi$ besitzt zwar grundsätzlich eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 3/4$, aber bei einer (semi-)analytischen Relation kann sich das eben ändern, wenn für Φ und Ψ *komplexe* Relationen wie hier $X \vee Y$ und $X \wedge Y$ eingesetzt werden.

Man kann verschiedene Formen bzw. Varianten eines solchen Schlusses unterscheiden:

- $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ + – – + $p^T = 2/4$
- $(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \longrightarrow (X \wedge Y)$ + + + – $p^T = 3/4$
- $(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \wedge (X \vee Y)$ + – – – $p^T = 1/4$
- $[(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \wedge (X \vee Y)] \Rightarrow (X \wedge Y)$ + + + + $p^T = 4/4$

Wir werden nun die entsprechenden *quantitativen* Formen dieses Schlusses untersuchen, insbesondere auf ihre theoretische Wahrscheinlichkeit; quantitativ ergibt sich allerdings eine *zusätzliche* Möglichkeit, weil den *Einzel-Komponenten* unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zugewiesen werden können.

- Gesamt-Relation:
  $p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = r/n$
- Einzel-Komponenten:
  $p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$
- Zusätzlicher Schluss auf Konklusion
  $(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$
- Bestätigung der Prämisse:
  $p((X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n$
- Modus ponens:
  $(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) = s/n$

Natürlich kann man diese Unterscheidungen auch für die *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$ treffen.

4-3-1-1 BERECHNUNG VON p^T EINER GESAMT-RELATION

Hier wird der Relation *als ganzes* eine *empirische* Wahrscheinlichkeit p zugewiesen, und zwar z. B. p = 1/5. Davon wird dann die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T berechnet. Nun gilt:

$(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)$, entsprechend
$p((X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = p(X \leftrightarrow Y)$

Daher kann man auch den p^T-Wert von $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ dem Wert der *synthetischen* Ä-quivalenz $X \leftrightarrow Y$ gleichsetzen. Also:

$p^T[X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y] = p^T[X \leftrightarrow Y]$
Quantitativ: $p^T[p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = 1/5] = p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/5]$

Und wie sich p^T-Wert von synthetischen (quantitativen) Relationen berechnen lässt, wurde bereits im Punkt 3-3 beschrieben.

$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}16$
Somit: $p^T[p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = 1/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}16$

4-3-1-2 BERECHNUNG VON p^T BEI EINZEL-KOMPONENTEN

Hier werden der Prämisse $X \vee Y$ und der Konklusion $X \wedge Y$ *getrennt* empirische Wahrscheinlichkeiten p zugewiesen. Wählen wir z. B.: $p(X \vee Y) = 2/3$ und $p(X \wedge Y) = 1/3$.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T gibt dann an, mit welchem Grad die Konklusion aus der Prämisse logisch folgt, also den *Grad der logischen Folge*. Es ergibt sich als theoretische Wahrscheinlichkeit bzw. als Folge-Grad p^T:

$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 49/64 = 0{,}77$

Wie sich diese und die folgenden Resultate berechnen lassen, wird später erläutert.

4-3-1-3 BERECHNUNG VON p^T BEI ZUSÄTZLICHEM SCHLUSS

Hier wird vom Schluss $p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3$ zusätzlich auf die Konklusion $p(X \wedge Y) = 1/3$ geschlossen. Dabei ergibt sich:

$p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3) \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 27/64 = 0{,}42$

4-3-1-4 BERECHNUNG VON p^T BEI BESTÄTIGTER PRÄMISSE

Man kann beim Schluss in 4-3-0-2 die Prämisse $p(X \vee Y) = 2/3$ noch *bestätigen*.

$(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n$

Dies spielt gerade bei der *normalen Implikation* eine Rolle, die ja auch als wahr gilt, wenn die Prämisse falsch ist.

Wir haben es hier also mit einer *Konjunktion* zu tun. Man könnte vielleicht denken, man erhalte hier den p^T-Wert durch *Multiplikation*. Wie wir oben gesehen haben:

$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 49/64$, andererseits gilt wiederum:
$p^T[p(X \vee Y) = 2/3] = 27/64$.

Gilt also im Beispiel $p^T = 49/64 \times 27/64 = 1323/4096 = 0{,}32$? Nein, denn man darf Wahrscheinlichkeiten nur *multiplizieren*, wenn die Glieder logisch *unabhängig* sind.
$p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3$ und $p(X \vee Y) = 2/3$ sind aber logisch abhängig.

Die richtige Rechnung lautet vielmehr:
$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3 \wedge p(X \vee Y) = 2/3] = 49/64 - 37/64 = 12/64 = 0{,}19$

4-3-1-5 BERECHNUNG VON p^T BEIM MODUS PONENS

Hier wird aus der in 4-3-1-4 genannten Konjunktion auf die Konklusion $p(X \wedge Y) = 1/3$ geschlossen. Damit haben wir insgesamt das logische Gesetz des *Modus ponens* vor uns (wenn auch eben in einer quantitativen Form).

$$p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3) \wedge p(X \vee Y) = 2/3$$
$$\Rightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 64/64 = 1$$

Wie man sieht, auch in diesem Fall ist der Modus ponens ein *strenges* Gesetz, führt zur einer strengen logischen Folge $\Rightarrow$.

Auf Berechnungen der Form in 4-3-1-2, auf Berechnungen des *Grades einer logischen Folge*, werde ich mich im Weiteren konzentrieren.

4-3-2 Implikation

4-3-2-1 HERLEITUNG DER THEORETISCHEN WAHRSCHEINLICHKEIT

Ich will hier nun herleiten, wie man die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T für die (semi-) analytische *Implikation* berechnen kann. Dazu muss ich etwas ausholen.

Gehen wir von 3 *Individuen* x, y, und z aus (also n = 3) und fragen, wie sie auf 2 *Variablen* F und G verteilt sein können. F und G können als *Eigenschaften* oder auch als *Mengen* interpretiert werden. Es sind 4 Kombinationen von F und G möglich:

F+, G+ / F+, G– / F–, G+ /F–, G–.

Besser schreibt man mittels *Konjunktion* und *Negation*:

$F \wedge G / F \wedge \neg G / \neg F \wedge G / \neg F \wedge \neg G$

Jedes Individuum kann nur *eine* Eigenschaftskombination besitzen bzw. nur Element *einer* Menge sein. Dabei ergeben sich insgesamt $2^6 = 64$ Möglichkeiten.

Der eine Extremfall ist, dass für x, y, z alle nur 1 Kombination gilt, z. B. nur $F \wedge G$, somit:

$Fx \wedge Gx$, $Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge Gz$ (auf Indizes verzichte ich hier).

Da es hierfür nur 1 von insgesamt 64 Kombinations-Möglichkeiten gibt, gilt also: $p^T = 1/64$.

Welche Möglichkeiten gibt es, dass für 2 Elemente $F \wedge G$ gilt und für 1 Element $F \wedge \neg G$?

$Fx \wedge Gx$, $Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge \neg Gz$

$Fx \wedge Gx$, $Fz \wedge Gz$, $Fy \wedge \neg Gy$

$Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge Gz$, $Fx \wedge \neg Gx$

Man kann nun von den speziellen *Verteilungen* abstrahieren und nur sagen, es gibt 3 Fälle, dass für 2 Elemente $F \wedge G$ gilt und für 1 Element $F \wedge \neg G$. Somit $p^T = 3/64$.

Präzise: $p^T[p(F \wedge G) = 2/3 \wedge p(F \wedge \neg G) = 1/3] = 3/64$.

Die genauen Tabellen hierfür bringe ich im Systematik-Teil (vgl. 5-3-2).

So kommt man zu folgender Verteilung. (Da im Folgenden von konkreten *Elementen* x, y, z abgesehen wird und nur die quantitativen Relationen zählen, verwende ich hier jetzt wieder die allgemeineren Variablen X und Y, also für F = X, für G = Y.)

4-3-2-2 TABELLE ZUR VERTEILUNG BEI n = 3

Erläuterung zur folgenden Tabelle (S. 33):

Die *2) Zeile* bedeutet z. B.: Die theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge Y$ zukommt und 1 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge \neg Y$, beträgt 3/64. $p^T[(p(X \wedge Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge \neg Y) = 1/3] = 3/64$

Oder allgemeiner: Die theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge Y$ zukommt, beträgt 9/64. $p^T[(p(X \wedge Y) = 2/3] = 9/64$.

Dies ergibt sich durch Addition der p^T-Werte aus den Zeilen 2), 5) und 6).

	$X \wedge Y$	$X \wedge \neg Y$	$\neg X \wedge Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	p^T
	a	b	c	d	
1)	3	0	0	0	1/64
2)	2	1	0	0	3/64
3)	1	2	0	0	3/64
4)	0	3	0	0	1/64
5)	2	0	1	0	3/64
6)	2	0	0	1	3/64
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64
9)	0	2	1	0	3/64
10)	0	2	0	1	3/64
11)	1	0	2	0	3/64
12)	1	0	1	1	6/64
13)	1	0	0	2	3/64
14)	0	1	2	0	3/64
15)	0	1	1	1	6/64
16)	0	1	0	2	3/64
17)	0	0	3	0	1/64
18)	0	0	2	1	3/64
19)	0	0	1	2	3/64
20)	0	0	0	3	1/64
					64/64

Wir wollen nun das analytische Verhältnis von $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$ untersuchen, zunächst als *Konjunktion*, dann als *Implikation*.

4-3-2-3 DIE KONJUNKTION $p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\wedge^{-} \ p(X \wedge Y) = s/n$

Ehe wir uns der semi-analytischen *Implikation* zuwenden, betrachten wir zunächst die semi-analytische *Konjunktion*, weil sich so die Implikation anschließend besser verstehen lässt. Wenden wir also die obige Verteilungs-Tabelle erst einmal auf folgende allgemeine semi-analytische Konjunktion an:

$$p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\wedge^{-} \ p(X \wedge Y) = s/n$$

Dabei ist daran zu erinnern, dass gilt:

$p(X \rightarrow Y) \geq p(X \wedge Y)$ bzw. $r \geq s$, entsprechend:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} \geq \frac{a}{a+b+c+d}$$

Wir untersuchen diese Relation für den Fall n = 3.

Z. B.: Wenn $p(X \rightarrow Y) = 2/3$, dann kann $p(X \wedge Y)$ folgende Werte annehmen: 2/3, 1/3, 0/3 (aber nicht 3/3).

Wenden wir nun die obige Tabelle auf diese *Konjunktion* an:

$$p(X \rightarrow Y) = r/3 \ {}^{+}\wedge^{-} \ p(X \wedge Y) = s/3$$

Dann erhalten wir für n = 3 die folgende Tabelle:

r	$p(X \to Y)$	$^{+}\wedge^{-}$	$p(X \wedge Y)$	p^T	Zeile
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$		In Tabelle 4-3-1-2
3	3/3		3/3	1/64	1
			2/3	6/64	5, 6
			1/3	12/64	11,12,13
			0/3	8/64	17,18,19,20
2	**2/3**		2/3	3/64	2
			1/3	**12/64**	**7,8**
			0/3	12/64	14,15,16
1	1/3		1/3	3/64	3
			0/3	6/64	9,10
0	0/3		0/3	1/64	4
				64/64	

Erläuterung:
Nehmen wir als Beispiel: $p^T[(p(X \to Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/64$
Dies bedeutet in Formeln:

$p(X \to Y) = 2/3$ $\quad \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 2/3$ $\quad$ somit b = 1 $\quad$ a + c + d = 2

$p(X \wedge Y) = 1/3$ $\quad \frac{a}{a+b+c+d} = 1/3$ $\quad$ somit a = 1 $\quad$ b + c + d = 2

(wichtig: p ist immer die reale, *ungekürzte* Häufigkeit, kein gekürzter Wert)
Am *einfachsten* ist also, wie suchen nach Zeilen in der Tabelle, in denen gilt: b = 1 und a = 1.
Hierfür sind zwei Zeilen aus der Tabelle 4-3-2-2 relevant:

	a	b	c	d	p^T
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64

Nur in diesen zwei Zeilen gilt: $(a = 1) \wedge (b = 1)$. Man *addiert* die Wahrscheinlichkeiten p^T aus diesen beiden Zeilen: 6/64 + 6/64 = 12/64 = 3/16 = 0,19.

4-3-2-4 PARTIELLER SCHLUSS $p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$
Wenden wir nun die obigen Erkenntnisse über die semi-analytische *Konjunktion* auf verschiedene semi-analytische *Schlüsse* an, und zwar auf zwei Varianten des Schlusses.
$p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n.$

Zunächst $p(X \to Y) = 3/3 = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3 = 1$

Wir formen als erstes, beim *Zentral-Relator*, die *Implikation* in eine *Konjunktion* um, weil sich der Schluss so einfacher berechnen lässt:

$\neg(p(X \to Y) = 3/3 \ \wedge p(X \wedge Y) = \neg 3/3)$

Für $\neg 3/3$ schreiben wir $\neq 3/3$, und das bedeutet hier konkret: < 3/3. Somit:

$\neg(p(X \to Y) = 3/3 \ \wedge p(X \wedge Y) < 3/3)$

D. h. wenn $p(X \wedge Y) = 3/3$ falsch ist, kann es sein: 2/3, 1/3 oder 0/3.

Ich schließe aus, dass ¬3/3 auch für einen Wert > 1 oder < 0 steht, und dass ein *anderer Nenner* in Frage kommt; ¬3/3 darf also z. B. nicht für 3/4 oder 2/5 stehen.

Für die Berechnung des gesamten Schlusses $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$ zählen aber nicht nur die *Welten*, in denen gilt: $p(X \rightarrow Y) = 3/3$ und $p(X \wedge Y) = 3/3$. Sondern – gemäß der Definition der Implikation – zählen auch die Welten, in denen $p(X \rightarrow Y) = 3/3$ falsch ist, d. h. hier in denen $p(X \rightarrow Y) < 3/3$ ist (nämlich 2/3, 1/3 oder 0/3).

Konkret: *ungültig* (falsch) sind nur folgende Kombinationen:

$p(X \rightarrow Y)$	$p(X \wedge Y)$	p^T
3/3	2/3	6/64
	1/3	12/64
	0/3	8/64
		26/64

D. h. mit einer $p^T = 26/64$ ist der Schluss ungültig, somit ist er gültig mit einer $p^T = 1 - 26/64 = 38/64$. Also: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 38/64 = 19/32 = 0{,}59$.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir jetzt eine allgemeine Tabelle für die Beispiel-Implikation aufstellen:

$$p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n, \text{ für } n = 3.$$

Dabei sei daran erinnert, dass gilt:

$$p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n \text{ bzw. } p(X \rightarrow Y) \geq p(X \wedge Y)$$

r	$p(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	$p(X \wedge Y)$	$p^T \longrightarrow$	$p^T \wedge \neg$	$p^T \wedge$
	$\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\dfrac{a}{a+b+c+d}$		Negative Fälle: 1 – …	
3	3/3		3/3	38/64	6/64+12/64+8/64	1/64
			2/3	21/64	1/64+12/64+8/64	6/64
			1/3	49/64	1/64+6/64 + 8/64	12/64
			0/3	45/64	1/64+6/64+12/64	8/64
2	2/3		2/3	40/64	12/64+12/64	3/64
			1/3	49/64	3/64+12/64	12/64
			0/3	49/64	3/64+12/64	12/64
1	1/3		1/3	58/64	6/64	3/64
			0/3	61/64	3/64	6/64
0	0/3		0/3	64/64= 1	0/64	1/64
						64/64

Zur Erläuterung: Die 1. Zeile (unser Beispiel) ist z. B. wie folgt zu lesen:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = p^T[\neg(p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) < 3/3)] =$

$1 - p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 2/3] - p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] -$
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] =$

$1 - (6/64 - 12/64 - 8/64) = 1 - 26/64 = 64/64 - 26/64 = 38/64$

Für den *deterministischen* Fall (beide Relationen p = 1) habe ich nun aus obiger und weiteren Tabellen eine *allgemeine Formel* zur Berechnung von p^T aufgestellt, nämlich:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n = 1] = (4^n - 3^n + 1)/4^n$

Für unser Beispiel mit n = 3 ergibt sich, als Bestätigung des Wertes aus der Tabelle:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = (4^3 - 3^3 + 1)/4^3 = (64 - 27 + 1)/64 = 38/64 = 0{,}59$

4-3-2-5 PARTIELLER SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3$

Als zweites Beispiel nehmen wir diesen *statistischen* Schluss.
Was ergibt sich hier für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T?

1) Negative Fälle: Ungültig ist die Relation, wenn gilt:
$p(X \rightarrow Y) = 2/3 \ \wedge\ p(X \wedge Y) \neq 2/3$, d. h.:
erstens: $p(X \rightarrow Y) = 2/3 \ \wedge\ p(X \wedge Y) = 1/3$
zweitens: $p(X \rightarrow Y) = 2/3 \ \wedge\ p(X \wedge Y) = 0/3$
$p(X \rightarrow Y) = 2/3 \ \wedge\ p(X \wedge Y) = 3/3$ ist logisch unmöglich, besäße also eine $p^T = 0$,
denn $p(X \rightarrow Y) \geq p(X \wedge Y)$.

2) p^T der negativen Fälle
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/64$
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] = 12/64$
also: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) \neq 2/3] = 12/64 + 12/64 = 24/64$

3) Subtraktion der negativen Fälle
$1 - 24/64 = 64/64 - 24/64 = 40/64$

4) Resultat
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3] = 40/64 = 5/8 = 0{,}63$

Eine *allgemeingültige* Formel für $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n]$ habe ich bisher noch nicht entwickelt. Ich habe schon öfters darauf hingewiesen, dass die Verwendung der *normalen Implikation* $\rightarrow$ im quantitativen Bereich zu problematischen bis unbrauchbaren Ergebnissen führen kann. Das lässt sich auch hier wieder gut erkennen.

Plausibel für unseres normales Verständnis von Wenn-Dann-Relationen wäre (laut obiger Tabelle): $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/64$
Real ist aber: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 38/64$
Dazwischen liegen Welten.

Das ist ein Hinweis darauf, auch hier wieder mit der *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$ zu arbeiten.

4-3-3 Positiv-Implikation

Konzentrieren wir uns also jetzt auf die *Positiv-Implikation*: Die folgende Tabelle gibt die Werte für $p(X \rightarrow Y) = r/n \ *\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$ (u. g. steht für „ungekürzt“): Wie man sieht, ergeben sich starke Abweichungen zu den Werten der Normal-Implikation:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \ *\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/27 = 0{,}04$ (Normal-Implikation: 0,59)
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \ *\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3] = 3/27 = 0{,}11$ (Normal-Implikation: 0,63)

r	$p(X \rightarrow Y)$	$*\!\longrightarrow$	$p(X \wedge Y)$	$p^T*\!\rightarrow$ u.g.	$p^T*\!\rightarrow$	$p^T*\!\rightarrow$ dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$			
3	3/3		3/3	1/27	1/27	0,04
			2/3	6/27	6/27	0,22
			1/3	12/27	12/27	0,44
			0/3	8/27	8/27	0,30
				27/27 = 1	27/27 = 1	
2	2/3		2/3	3/27	1/9	0,11
			1/3	12/27	4/9	0,44
			0/3	12/27	4/9	0,44
				27/27 = 1	9/9 = 1	
1	1/3		1/3	3/9	1/3	0,33
			0/3	6/9	2/3	0,66
				9/9 = 1	3/3 = 1	
0	0/3		0/3	1/1	1/1	1,00
				1/1 = 1	1/1 = 1	

Es geht nun darum, eine *Formel* anzugeben, durch die man allgemein die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T und damit den *Grad der Folgerichtigkeit* des hier gezeigten Schlusses berechnen kann. Ich habe folgende Formel entwickelt:

$$p^T[(p(X \rightarrow Y) = r/n \;\; *\!\!\longrightarrow \;\; p(X \wedge Y) = s/n] = \binom{r}{r-s}(2/3)^{r-s}(1/3)^s$$

Diese und entsprechende andere Formeln werde ich im folgenden Punkt 4-3-4 erläutern.

4-3-4 Systematik

In diesem Punkt beschränke ich mich (für den Zentral-Relator) nur auf Formeln für die *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$, weil diese wie beschrieben gerade im quantitativen Bereich der *Normal-Implikation* $\rightarrow$ deutlich überlegen ist. (Außerdem habe ich auch noch keine allgemeingültigen Formeln für die normale Implikation entwickelt.)

Es geht also allgemein um Schlüsse der Form: $p(\Phi) = r/n \;\; *\!\!\longrightarrow p(\Psi) = s/n$
Dabei möchte ich hier 6 unterschiedliche Formeln vorstellen.

Grundsätzlich gibt es 2 Typen von Formeln, welche *mit n* und welche *ohne n* (ausschließlich mit *r* und *s*); beide Typen werden verwendet.

Es mag verwundern, dass Formeln, die nicht auf den *Nenner n* Bezug nehmen, gültig sein können. Aber in der Tat ist der p^T-Wert von s/n in bestimmten Fällen nur von r abhängig (und unabhängig von n).

Strukturell unterscheide ich die Formeln nach:

• der *Prämisse* und • der *Konklusion*

• *Prämisse*: Bei der *Prämisse* $p(\Phi) = r/n$ differenziere ich zwischen Relationen mit $p^T = 3/4$, 2/4 und 1/4.

• *Konklusion*: Auch hier unterscheide ich wie bei der Prämisse nach p^T ($p^T = 3/4$, 2/4 oder 1/4), aber das ist keine vollständig überzeugende Lösung.

In jedem Fall erfasst man mit den 6 Formeln *nicht alle* möglichen Schlüsse der Positiv-Implikation. So zeige ich 2 Formeln für einen Schluss von p(X → Y) = r/n aus. Aber z. B. für Schlüsse wie p(X → Y) *⟶ p(X ← Y) oder p(X → Y) *⟶ p(X) benötigte man modifizierte Formeln, wie die Tabellen in Kap. 5 zeigen. Ohnehin geht es hier nur um Schlüsse mit *zwei* Variablen, für mehrere Variablen wären die Formeln zu modifizieren. Es ist weiterer Forschungsarbeit vorbehalten, zusätzliche Formeln aufzustellen.

4-3-4-1 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 3/4$

Das sind X → Y, X ← Y, X ∨ Y oder X | Y.

Dabei unterscheide ich, in wie vielen Welten die *Konklusion* strukturell in der Wahrheitstafel positiv ist, also ein + unter dem Zentral-Relator besitzt; anders gesagt, wie hoch *strukturell* die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T der Konklusion ist.

Z. B.: X ↔ Y + − − +, also $p^T = 2/4$, X ∧ Y: + − − −, $p^T = 1/4$

Die folgende Angabe „semi-analytisch" oder „analytisch" bezieht sich auf die *qualitative* Struktur der Schlüsse, quantitativ kann sich eine Veränderung ergeben.

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden, jeweils in *quantitativer* Form:

(X → Y) *⟶ (X ↔ Y) quantitativ: p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ↔ Y) = s/n
(X ∨ Y) *⟶ (Y) quantitativ: p(X ∨ Y) = r/n *⟶ p(Y) = s/n

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden (jeweils in quantitativer Form):

(X → Y) *⟶ (X ∧ Y) quantitativ: p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n
(X ∨ Y) *⟶ (X ∧ Y) quantitativ: p(X ∨ Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n

4-3-4-2 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 2/4$

(Z. B. X ↔ Y, X >< Y)

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden

(X ↔ Y) *⇒ (X → Y) quantitativ: p(X ↔ Y) = r/n *⟶ p(X → Y) = s/n
X *⇒ (X ∨ Y) quantitativ: p(X) = r/n *⟶ p(X ∨ Y) = s/n

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^s(1/2)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \leftrightarrow Y)$ *⟶ $(X \wedge Y)$ quantitativ: $p(X \leftrightarrow Y) = r/n$ *⟶ $p(X \wedge Y) = s/n$

X *⟶ $(X \wedge Y)$ quantitativ: $p(X) = r/n$ *⟶ $p(X \wedge \;\; Y) = s/n$

4-3-4-3 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 1/4$ (Z. B. $X \wedge Y$, $X \nabla Y$)

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y)$ *⇒ $(X \rightarrow Y)$ quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = s/n$

$(X \wedge Y)$ *⇒ $(X \vee Y)$ quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(X \vee Y) = s/n$

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y)$ *⇒ X quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(X) = s/n$

$(X \wedge Y)$ *⇒ Y quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(Y) = s/n$

4-3-4-4 DEMONSTRATION: VOLLSTÄNDIGER SCHLUSS

Ich möchte mich für eine genaue Demonstration auf zwei Beispiele beschränken (zunächst in 4-3-4-4 einen *strukturell gültigen* Schluss, dann in 4-3-4-5 einen *strukturell partiell gültigen* Schluss).

Dabei bringe ich jeweils:

- zunächst den Schluss, der die mögliche *empirische* Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion* angibt (aus dem Wert p der *Prämisse* ableitet)
- dann die Formel, mit der man die zugehörige *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T des obigen Schlusses bestimmt.

Als Beispiel für den strukturell *vollständigen*, d. h. gültigen Schluss nehme ich die *Abtrennungsregel* bzw. *Simplifikationsregel* (die gilt auch für die Normal-Implikation $X \wedge Y \Rightarrow Y$).

Für die *Abtrennungsregel* $X \wedge Y$ *⇒ Y (mit Positiv-Implikation) ergibt sich:

- Schluss von der empirischen Wahrscheinlichkeit p der *Prämisse* auf die empirische Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion*

□ qualitative Basis: $X \wedge Y$ *⇒ Y

□ quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⇒ $p(Y) \geq r/n$

bzw. $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(Y) = s/n$

□ Bruch-Form: $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$ *⇒ $\frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

bzw. $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \quad {*}\!\!\longrightarrow \quad \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$$

Dabei gilt r ≤ s, also s = r, r + 1, r + 2, ... , n. Nur, wenn man r ≤ s bzw. diese alternativen Werte hinzufügt, gilt der *strenge* Schluss auch in der Form p(X ∧ Y) = r/n *⇒ p(Y) = s/n.
Ansonsten muss man p(X ∧ Y) = r/n *⟶ p(Y) = s/n als *partiellen* Schluss deuten.
Es gibt nämlich 2 Alternativen zu unterscheiden:
Erstens, man gibt für p(Y) nicht eine bestimmte Lösung an, sondern eine *Auswahl* mehrerer Möglichkeiten, dann gilt der *strenge* Schluss: p(X ∧ Y) = r/n *⇒ p(Y) ≥ r/n.
Zweitens, man gibt für die Konklusion p(Y) einen *bestimmten* Wert an, z. B. soll gelten: s/n = (r + 1)/n. Hier besteht nur ein *partieller* Schluss p(X ∧ Y) = r/n *⟶ p(Y) = (r + 1)/n
Schreiben wir p(Y) ≥ r/n, dann gibt es also verschiedene mögliche *Lösungen* für die Konklusion p(Y): p(Y) = r/n, p(Y) = (r + 1)/n, ... , p(Y) = n/n.

• Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Schlusses
Um zu berechnen, mit welcher *theoretischen* Wahrscheinlichkeit p^T, mit welchem *Grad von Folgerichtigkeit,* eine *bestimmte Lösung* gilt, habe ich die folgende Formel entwickelt:

$$p^T[(p(X \wedge Y) = r/n \ {*}\!\!\longrightarrow \ p(Y) = s/n] = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$$

Man könnte das auch als Schluss angeben:

$$[p(X \wedge Y) = r/n \ {*}\!\!\longrightarrow \ p(Y) = s/n] \ \Rightarrow \ [p^T = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}]$$

• Beispiel
p(X ∧ Y) = 1/4 *⇒ p(Y) ≥ 1/4.
Somit: r/n = 1/4. Dann gibt es für s/n: 4 Lösungen
$L_1 = 1/4$, $L_2 = 2/4$, $L_3 = 3/4$, $L_4 = 4/4$

Z. B. will man die Wahrscheinlichkeit p^T für $L_3 = 3/4$ berechnen.
Also: r = 1, n = 4, s = 3

$$p^T[(p(X \wedge Y) = 1/4 \ {*}\!\!\longrightarrow \ p(Y) = 3/4] =$$

$$\binom{4-1}{4-3}(2/3)^{4-3}(1/3)^{3-1} = 3 \times 2/3 \times 1/9 = 6/27 = 2/9 = 0{,}22$$

In Worten: wenn p(X ∧ Y) = 1/4 dann besteht eine theoretische Wahrscheinlichkeit von $p^T = 2/9$, dass p(Y) = 3/4.
Anders gesagt: p(Y) = 3/4 folgt logisch mit einem Grad von 2/9 aus p(X ∧ Y) = 1/4.
Man muss hier den Pfeil *⟶ für *partielle* logische Folge verwenden. Zwar ist der Schluss p(X ∧ Y) = r/n *⇒ p(Y) ≥ r/n (unter Verwendung von Variablen) *vollständig*, aber mit den Beispiel-Werten (Konstanten) gilt er nur *partiell*, eben nur mit einem Grad von 0,22.

4-3-4-5 DEMONSTRATION: PARTIELLER SCHLUSS

Es geht hier um einen *Schluss, dessen Struktur nur partiell analytisch ist,* als Beispiel:
Umgekehrte Abtrennungsregel X *⟶ X ∧ Y

Bei einem solchen Schluss muss ich in der *Basisform* den Pfeil $*\longrightarrow$ (für *partielle* logische Folge) verwenden. Dennoch gilt der Schluss in der *quantitativen* Form bzw. in der Bruchform *vollständig*, daher ist hier der Doppelpfeil $*\Rightarrow$ einzusetzen.

• Schluss von der empirischen Wahrscheinlichkeit p der *Prämisse*
auf die empirische Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion*

□ qualitative Basis: $X *\longrightarrow X \wedge Y$
□ quantitative Form: $p(X) = r/n *\Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$

□ Bruch-Form: $\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \quad *\Rightarrow \quad \dfrac{a}{a+b+c+d} \leq \dfrac{r}{n}$

bzw. $\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \quad *\longrightarrow \quad \dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$

• Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Schlusses
Wie berechnet man nun die Wahrscheinlichkeit p^T für diese Lösungen?
Ich habe folgende Formel aufgestellt:

$$p^T[(p(X) = r/n \; *\longrightarrow \; p(X \wedge Y) = s/n] = \binom{r}{r-s}(1/2)^{r-s}(1/2)^s$$

• Beispiel
$p(X) = 4/5 *\Rightarrow p(X \wedge Y) \leq 4/5$. Folglich: r = 4, n = 5.

Folgende fünf Lösungen für $p(X \wedge Y)$: $L_1 = 4/5$, $L_2 = 3/5$, $L_3 = 2/5$, $L_4 = 1/5$, $L_5 = 0/5$.
Berechnung für Lösung: $L_2 = 3/5$. Es gilt also: n = 5, r = 4, s = 3.

$$p^T[(p(X) = 4/5 \; *\longrightarrow \; p(X \wedge Y) = 3/5] =$$

$$\binom{4}{4-3}(1/2)^{4-3}(1/2)^3 = 4 \times 1/2 \times 1/8 = 4/16 = 1/4 = 0{,}25$$

4-3-5 Erweiterungen

In den Erweiterungen möchte ich mich *Pseudo-Schlüssen* widmen. Ein Pseudo-Schluss ist z. B.: $X \rfloor Y \; *\longrightarrow \; X \lfloor Y$, quantitativ $p(X \rfloor Y) = r/n \; *\longrightarrow \; p(X \lfloor Y) = s/n$.
Nehmen wir als Beispiel n = 4, so ergibt sich:

$p(X \rfloor Y) *\longrightarrow p(X \lfloor Y)$		p^T
4/4	4/4	1/16
	3/4	4/16
	2/4	6/16
	1/4	4/16
	0/4	1/16

Wenn wir für $p(X \rfloor Y)$ nicht 4/4 , sondern 0/4, 1/4, 2/4 oder 3/4 einsetzen, folgt dasselbe:

z. B.

$p(X \rfloor Y)$ *⟶	$p(X \lfloor Y)$	p^T
3/4	4/4	1/16
	3/4	4/16
	2/4	6/16
	1/4	4/16
	0/4	1/16

Hier zeigt sich nun Folgendes:

• Wenn man $p(X \lfloor Y)$ mit n = 4 für sich alleine betrachtet, so erhält man denselben Verlauf von p^T wie in Abhängigkeit von $p(X \rfloor Y)$:

z. B.: $p^T[p(X \lfloor Y) = 4/4] = p^T[p(X \rfloor Y) = 4/4$ *⟶ $p(X \lfloor Y) = 4/4] = 1/16$

$p(X \lfloor Y)$	p^T
4/4	1/16
3/4	4/16
2/4	6/16
1/4	4/16
0/4	1/16

• Gleichgültig, welchen Wert 0/n bis n/n man für $p(X \rfloor Y)$ einsetzt, $p(X \lfloor Y)$ kann ebenfalls jeden *beliebigen* Wert 0/n bis n/n annehmen.

• Gleichgültig, welchen Wert 0/n bis n/n, konkret von 0/4 bis 4/4 man für $p(X \rfloor Y)$ einsetzt, $p(X \lfloor Y)$ hat immer die *gleiche* p^T-Verteilung, konkret 1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16.

Das beweist aber alles, dass $p(X \lfloor Y)$ vollständig *unabhängig* von $p(X \rfloor Y)$ ist. Dies verwundert auch nicht, denn es gilt ja: X ⇔ X $\rfloor$ Y und Y ⇔ X $\lfloor$ Y.

Bei X $\rfloor$ Y *⟶ X $\lfloor$ Y handelt es sich also gar nicht um einen echten Schluss, sondern in Wahrheit um eine *synthetische* Relation, entsprechend X *→ Y.

Daher kann man p^T von $p(X \rfloor Y) = r/n$ *⟶ $p(X \lfloor Y) = s/n$ nach einer Formel für synthetische *Gleichgewichts-Relationen* wie p(X *→ Y) = r/n berechnen (vgl. 3-3-3).

Abschließend

Die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T hat eine erstaunliche Doppelfunktion:

Bei *synthetischen* Relationen gibt sie die Größe und die Sicherheit der *empirischen Abhängigkeit* an (während die *empirische* Wahrscheinlichkeit p in anderer Weise die empirische Abhängigkeit quantifiziert). Bei *analytischen* Relationen gibt die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T den Grad der *analytischen Abhängigkeit* an.

In beiden Fällen gibt p^T aber zusätzlich den Grad *theoretischer Wahrheit* bzw. den *tautologischen Grad* an, bei einem Schluss ist das der *Grad der Folgerichtigkeit*.

Allerdings gilt für synthetische Relationen: $0 < p^T < 1$. D. h. synthetische Relationen sind nicht *vollständig* tautologisch oder *vollständig* kontradiktorisch. Dennoch können synthetische Relationen einen p^T-Wert beliebig nahe an 1 oder 0 besitzen. Das bedeutet nicht, dass bei ihnen eine *analytische* Abhängigkeit gegeben wäre. Z. B. gibt es bei $p^T[X \vee Y \vee Z] = 7/8$ *keine analytische Abhängigkeit* zwischen X, Y und Z. Synthetische Relationen beinhalten schon *definitorisch* keine analytische Abhängigkeit.

4 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

4-4-1 Einführung

Es geht hier um Schlüsse, bei denen Prämisse und Konklusion *deterministisch* sind, also den Wert p = 1 oder p = 0 besitzen. Im Gegensatz zu *statistischen* Schlüsse n, bei denen für die Prämissen (und/oder die Konklusion) gilt: $0 < p < 1$.

Ehe wir uns aber der *Analyse* eines Schlusses in seine Komponenten *Prämisse(n)* und *Konklusion* zuwenden, wollen wir die *Gesamtbetrachtung* eines Schlusses vornehmen. Um den Unterschied von p und p^T noch einmal herauszuarbeiten.

Denn gerade bei der *Tautologie* kann man leicht die *empirische* Wahrscheinlichkeit p und die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T verwechseln. Beide haben nämlich prinzipiell den Wert 1.

Da jede Tautologie bzw. jeder gültige Schluss (bei 2 Variablen) die Wahrheitsfolge + + + + aufweist, kann man letztlich jede solche Tautologie durch den Bruch $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$ darstellen.

Es gilt dann:

• *empirische Wahrscheinlichkeit* p

Für jede Tautologie (bei 2 Variablen X, Y) gilt:

$$\text{p(Tautologie)} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = n/n = 1$$

p hat also immer, *notwendig* den Wert 1, der kann aber für verschiedene konkrete Brüche stehen. p kann z. B. folgende Werte annehmen: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5 usw.

• *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T

Auch die theoretische Wahrscheinlichkeit einer Tautologie hat immer den Wert 1.
Dies kann man sich leicht verdeutlichen: p^T gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass gilt:

$$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

Und diese Gleichung gilt sicher, d. h. sie gilt mit 100% (theoretischer) Wahrscheinlichkeit.
Allerdings kann $p^T = 1$ ebenfalls für verschiedene Brüche stehen. Im einfachsten Fall, nämlich bei n = 1 gibt es nur *ein* x, nämlich x_1. Dieses x_1 kann unter a, b, c oder d fallen; es ergeben sich hier also 4 Möglichkeiten. In jedem Fall beträgt aber der Wert des Bruches $p^T = 1$.

Denn es gilt:

p	p^T
1/1	$4^1/4^1$
2/2	$4^2/4^2$
....	
n/n	$4^n/4^n$

Als Formel können wir schreiben:

$$p^T[p = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = n/n = 1] = 4^n/4^n = 1$$

Es gilt also: p(Tautologie) = 1, p^T(Tautologie) = 1.
Entsprechend gilt bei Kontradiktionen: p(Kontradiktion) = 0 und p^T(Kontradiktion) = 0.

Die obigen Überlegungen gelten uneingeschränkt nur für Schlüsse (Tautologien), bei denen der *Gesamt-Schluss* quantifiziert ist. Anders sieht es bei Schlüssen aus, bei denen Prämisse und Konklusion *getrennt* quantifiziert sind, z. B.:

$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$ $\qquad \frac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Hier gilt zwar auch p = 1 und $p^T = 1$, aber beim folgenden Schluss ist p = 0, dabei $p^T = 1$.

$p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \wedge Y) = 0$ $\qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} = 0$

Nachfolgend werden wir uns auf solche, *getrennt quantifizierte*, Schlüsse, konzentrieren.
Dabei sollen wieder folgende Schlüsse unterschieden werden:

- *streng analytische*, z. B.: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
  In diesem Fall ist $p^T = 1$, wenn die Prämissen *deterministisch* (p = 1 bzw. p = 0) sind.
- *partiell analytische*, z. B. $p(Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$
  Dabei muss p^T nicht den Wert 1 haben, auch wenn die Prämissen deterministisch sind.

4-4-2 Implikation

Ich möchte mich hier auf *zwei* Beispiele beschränken:

- den *semi-analytischen* Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \wedge Y)$
- und seine *analytische* Umkehrung $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$

Der erste Schluss lautet in quantitativer Form:

$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$, *allgemein* $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$

In der quantitativen Aussagen-Logik werden wie gesagt nur die *deterministischen* Werte p = 1 und p = 0 verwendet. Wir verwenden bei diesem Beispiel nur p = 1. Somit gilt: r = s = n

Durch *Wahrheitstafeln* kann man die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T ermitteln, deshalb stelle ich die Formen des Schlusses zunächst quasi *aussagen-logisch*, qualitativ dar:

n = 1 $(X_1 \rightarrow Y_1) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1)$ $p^T = 2/4$
n = 2 $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \wedge (X_2 \wedge Y_2)$ $p^T = 8/16$
n = 3 $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_3 \rightarrow Y_3) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_3 \wedge Y_3)$ $p^T = 38/64$

In quantitativer Darstellung:
n = 1 $p(X \rightarrow Y) = 1/1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/1$ $p^T = 2/4$
n = 2 $p(X \rightarrow Y) = 2/2 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/2$ $p^T = 8/16$
n = 3 $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$ $p^T = 38/64$

(Falsch wäre dabei die Berechnung der *Gesamtformel*, *also* $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \wedge Y)) = 1/1$, denn bei diesem Schluss sind Prämisse und Konklusion *getrennt* quantifiziert.)

Hier ist ein Fall, der schön demonstriert, wie leicht man sich bei der Aufstellung von Formeln täuschen kann. Betrachtet man nur n = 1 und n = 2, so könnte man vermuten, dass $p^T = 1/2$, denn 2/4 und 8/16 sind beide gleich 1/2, und ein Zufall scheint unwahrscheinlich. Zieht man aber n = 3 hinzu, so ergibt sich ein anderes Bild. In Wirklichkeit ist die Formel viel komplizierter und lautet: $(4^n - 3^n + 1)/4^n$.

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n] = (4^n - 3^n + 1)/4^n$$
n = 1: $(4^1 - 3^1 + 1)/4^1 = (4 - 3 + 1)/4 = 2/4 = 0{,}5$
n = 2: $(4^2 - 3^2 + 1)/4^2 = (16 - 9 + 1)/16 = 8/16 = 0{,}5$
n = 3: $(4^3 - 3^3 + 1)/4^3 = (64 - 27 + 1)/64 = 38/64 = 0{,}59$ usw.

Kommen wir jetzt zum *Umkehr-Schluss*: $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$, der *tautologisch* ist.
Er lautet in der quantitativen Aussagen-Logik:
$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1$ bzw. $p(X \wedge Y) = n/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) = n/n$.
Hier benötigt man keine komplizierte Formel zur Berechnung, denn bei einer Tautologie gilt immer $p^T = 1$.
$$p^T[p(X \wedge Y) = n/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = n/n] = 4^n/4^n = 1.$$

4-4-3 Positiv-Implikation

Als Beispiel ein Schluss, der von der Struktur her *vollständig analytisch* ist:

Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)

- qualitative Basis: $X \wedge Y \ {*}{\Rightarrow}\ Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = s/n = 1$
- Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Ich gebe hier ein Zahlenbeispiel: $(X \wedge Y) = 4/4 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = 4/4$
also: r = 4, n = 4, s = 4

Nach der in 4-3-4-3 vorgestellten Formel ergibt sich:
$$p^T[(p(X \wedge Y) = 4/4 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = 4/4] =$$

$$\binom{4-4}{4-4}(2/3)^{4-4}(1/3)^{4-4} = 1\times(2/3)^0\times(1/3)^0 = 1\times1\times1 = 1$$

Der Schluss hat also eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 1$, er ist somit *vollständig*. Davon ist zu unterscheiden, dass auch beide Einzel-Relationen eine empirische Wahrscheinlichkeit p = 4/4 = 1 besitzen. Die Formel gilt generell, man muss keine konkreten Zahlenwerte einsetzen.

Auf die Berechnung eines *negativen* Beispiels, z. B. $p(Y) = 0 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \wedge Y) = 0$, verzichte ich hier.

4-4-4 Systematik

Ich habe in 4-3-4 sechs Formeln zur Berechnung von p^T bei quantitativen Schlüssen mit der *Positiv-Implikation* aufgestellt.

Es handelt sich um Schlüsse der Form:

– *semi-analytisch*: $p(\Phi) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(\Psi) = s/n$ oder

– *analytisch*: $p(\Phi) = r/n \ {*}{\Rightarrow}\ p(\Psi) = s/n$

Hier soll nun demonstriert werden, was sich ergibt:

- im *deterministischen* Fall: p = 1, konkret: $p(\Phi) = 1$ und $p(\Psi) = 1$, r = s = n, r > 0 (somit auch s > 0 und n > 0)
- im *nullistischen* Fall: p = 0, konkret: $p(\Phi) = 0$ und $p(\Psi) = 0$, r = s = 0 (allerdings n > 0, ein Nenner von 0 ist nicht erlaubt)

1. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \to Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Für die erste Formel sei das genauer erklärt:

Positiver Fall: p = 1: $p^T = (2/3)^S$

Erklärung:

Wenn r = s, dann gilt: $\binom{r}{r-s} = 1$ und $(1/3)^{r-s} = 1$, somit:

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s} = 1\times(2/3)^s\times1 = (2/3)^s$$

Beispiel : $p^T[p(X \to Y) = s/s = 1 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1] = (2/3)^s$

Negativer Fall: p = 0: $p^T = 1$

Erklärung:

Wenn r = s = 0, dann gilt ebenfalls: $\binom{r}{r-s}$ = 1 und $(1/3)^{r-s} = 1$, somit

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s} = 1\times(2/3)^0\times 1 = 1\times 1\times 1 = 1$$

Beispiel: $p^T[p(X \to Y) = 0 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 0] = 1$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Positiver Fall: p = 1, $p^T = (1/3)^S$
Negativer Fall: p = 0, $p^T = 1$

Beispiel: $(X \to Y) \ {*}\!\!\longrightarrow (X \wedge Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \to Y) = s/s = 1 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/3)^s$
Negativer Fall: $p^T[p(X \to Y) = 0 \ {*}\!\!\Rightarrow p(X \wedge Y) = 0] = 1$

2. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \to Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

p = 1, $p^T = 1$
p = 0, $p^T = (1/2)^n$

Beispiel: $(X \leftrightarrow Y) \ {*}\!\!\Rightarrow (X \to Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1 \ {*}\!\!\Rightarrow p(X \to Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \to Y) = 0/n = 0] = (1/2)^n$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^s(1/2)^{r-s}$$

p = 1, $p^T = (1/2)^s$
p = 0, $p^T = 1$

Beispiel: $(X \leftrightarrow Y) \ {*}\!\!\longrightarrow (X \wedge Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/2)^s$
Negativer Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0 \ {*}\!\!\Rightarrow p(X \wedge Y) = 0] = 1$

3. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

$p = 1,\ p^T = 1$
$p = 0,\ p^T = (1/3)^n$

Beispiel: $(X \wedge Y)\ {*}{\Rightarrow}\ (X \rightarrow Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 1\ {*}{\Rightarrow}\ p(X \rightarrow Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0\ {*}{\longrightarrow}\ p(X \rightarrow Y) = 0/n = 0] = (1/3)^n$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

$p = 1,\ p^T = 1$
$p = 0,\ p^T = (2/3)^n$

Beispiel: $(X \wedge Y)\ {*}{\Rightarrow}\ (X \leftrightarrow Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 1\ {*}{\Rightarrow}\ p(X \leftrightarrow Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0\ {*}{\longrightarrow}\ p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0] = (2/3)^n$

4-4-5 Erweiterungen

Ich behandele hier folgende Schluss-Strukturen der *Normal*-Implikation (mit Beispielen):

$p = 1$ auf $p = 1$
$p = 1$ auf $p = 0$
$p = 0$ auf $p = 1$
$p = 0$ auf $p = 0$

Aber nur *echte* Schlüsse mit $p^T = 1$.

- $p = 1 \Rightarrow p = 1$

$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \ \Rightarrow\ p(X \vee Y) = 1] = 1$

- $p = 0 \Rightarrow p = 0$

$p^T[p(X \vee Y) = 0 \ \Rightarrow\ p(X \wedge Y) = 0] = 1$

• $p = 1 \Rightarrow p = 0$

a) kontravalente Relation ($X \wedge Y$ steht in Kontravalenz zu $X \mid Y$)
$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \mid Y) = 0] = 1$

b) nicht kontravalente Relation ($X \wedge Y$ steht nicht in Kontravalenz zu $X \nabla Y$)
$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \nabla Y) = 0] = 1$

• $p = 0 \Rightarrow p = 1$

a) kontravalente Relation
$p^T[p(X \vee Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \nabla Y) = 1] = 1$

b) nicht kontravalente Relation
$p^T[p(X \vee Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \leftrightarrow Y) = 1] = 1$

4 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

4-5-1 Einführung

Dieses Kapitel knüpft vor allem an Unter-Kapitel 4 – 2, *Quantoren- und Prädikaten-Logik*. Entsprechend früheren Erläuterungen findet primär folgende *Quantifizierung* statt:

• alle	Λ	$p = 1$	n/n
• alle nicht	Λ¬	$p = 0$	0/n
• einige	V	$p > 0$	> 0/n
• einige nicht	V¬	$p < 1$	< n/n

Auf der Basis dieser Quantifizierungen werden die in 4 – 2 dargestellten Gesetze formuliert.

4-5-2 Implikation

• *Strenger Schluss: von alle auf einige*

Einfach:

$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X) = n/n \Rightarrow p(X) > 0/n] = (2/2)^n = 1$

Komplex:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (4/4)^n = 1$

• *Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle*

Einfach:

$p^T[p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n] = (1/2)^{n-1}$ bzw. einfacher $1/2^{n-1}$

Beispiel: alle = n = 3: $p^T[p(X) > 0/3 \longrightarrow p(X) = 3/3] = (1/2)^{3-1} = (1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25$

Komplex:

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = n/n] = (3^n +1)/4^n$

Beispiel für alle = n = 3:

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/3 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 3/3] = (3^3 +1)/4^3 = 28/64 = 7/16 = 0{,}44$

• *Semi-analytischer Schluss: von alle auf einige / Formalisierung mit* $\wedge$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/n] = (4^n - 2^n)/4^n$

Beispiel für n = 3:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3] = (4^3 - 2^3)/4^3 = 56/64 = 7/8 = 0{,}88$

4-5-3 Positiv-Implikation

• *Strenger Schluss: von alle auf einige*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 *\Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n *\Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (3/3)^n = 1$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation:

$p^T[p(X *\rightarrow Y) = 1 *\Rightarrow p(X *\rightarrow Y) > 0] = 1$

Genauer: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = n/n *\Rightarrow p(X *\rightarrow Y) > 0/n] = (1/1)^n = 1$

• *Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:
$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \ *\!\longrightarrow\ p(X \rightarrow Y) = n/n] = 3^n/(4^n - 1)$

Beispiel für n = 2:
$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/2 \ *\!\longrightarrow\ p(X \rightarrow Y) = 2/2] = 3^2/(4^2 - 1) = 9/15 = 3/5 = 0{,}6$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation:
$p^T[p(X *\rightarrow Y) > 0/n \ *\!\longrightarrow\ p(X *\rightarrow Y) = n/n] = 1/(2^n - 1)$

Beispiel für n = 2:
$p^T[p(X *\rightarrow Y) > 0/2 \ *\!\longrightarrow\ p(X *\rightarrow Y) = 2/2] = 1/(2^2 - 1) = 1/3 = 0{,}33$

• *Semi-analytischer Schluss: von alle auf einige / andere Formalisierung mit* $\wedge$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n *\!\longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/n\ ] = (3^n - 2^n)/3^n$

Beispiel für n = 4:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 *\!\longrightarrow\ p(X \wedge Y) > 0/4] = (3^4 - 2^4)/3^4 = (81 - 16)/81 = 65/81 = 0{,}8$

Dieses Beispiel will ich etwas genauer erläutern und zeigen, wie man das obige Ergebnis prüfen kann.

$p(X \rightarrow Y) = 4/4 *\!\longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/4$

Wenn $p(X \to Y) = 4/4$, ergibt sich für:

$p(X \wedge Y)$	p^T
4/4	1/81
3/4	8/81
2/4	24/81
1/4	32/81
0/4	16/81
	81/81

So kann man sagen:

$p^T[p(X \to Y) = 4/4 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 0/4] = 16/81 = 0{,}20$ Daraus folgt:

$p^T[p(X \to Y) = 4/4 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/4] = 81/81 - 16/81 = 65/81 = 0{,}80$

Der einfachste Weg ist der oben beschrittene:
Man berechnet erst den Wert für $p(X \wedge Y) = 0$, hier $p^T = 16/81$.
Nun subtrahiert man diesen Wert von dem der Gesamtverteilung: $81/81 - 16/81 = 65/81$.
Da gilt: $p^T[p(\Phi) = 0] + p^T[p(\Phi) > 0] = 1$, hat man so das gewünschte Ergebnis.

Die Verwendung der *Implikation* $\to$ für All-Strukturen: $\Lambda x(Fx \to Gx)$ und der *Konjunktion* $\wedge$ für Partikulär-Strukturen: $Vx(Fx \wedge Gx)$ ist wie gesagt gebräuchlich. Hier, bei der wahrscheinlichkeits-theoretischen Analyse, zeigt sich erneut, dass bei Verwendung dieser Relatoren der Schluss von „alle" auf „einige" nicht streng gilt (das hieße $p^T = 1$), sondern nur wahrscheinlich ist. Und zwar gilt das sowohl bei der Verwendung der *Implikation* $\to$ wie bei Verwendung der *Positiv-Implikation* $*\!\!\to$. Man hält aber den Schluss von „alle" auf „einige" normalerweise für *sicher*, wieder ein Hinweis auf die Problematik dieser Formalisierung.

4-5-4 Systematik

Es werden hier nur ausgewählte Beispiele gebracht, um den Text nicht zu umfangreich zu gestalten.

Dabei sei daran erinnert: Für p = 1 („alle") ist ganz korrekt p = 1,0 oder p = 100% zu schreiben, da *p* eben eine *relative* Größe ist. Am klarsten ist es, wenn man p = n/n schreibt, also mit Angabe der *absoluten* Größen von Zähler und Nenner, zumal auch p^T von den absoluten Werten *n* abhängt, also unterschiedlich ausfällt, je nachdem ob p ist: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5 usw.

Entsprechendes gilt für die anderen Werte wie p < 1, p = 0 und p > 0. Allerdings ist die 0 ein Sonderfall, weil hier *absoluter* und *relativer* Wert zusammenfallen: $p = 0 \Leftrightarrow p = 0\%$.

Der Einfachheit verwende ich aber nachfolgend die kürzere Schreibweise, ohne immer n einzusetzen, also z. B. nur p = 1 statt p = n/n oder p = 0 statt p = 0/n.

• Einfache Tautologie
$p^T = (2/2)^n = 1$
$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$
$p^T[p(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1]$

• Komplexe Tautologie
$p^T = (4/4)^n = 1$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0]$
$p^T[p(X \rightarrow \neg Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow \neg Y) > 0]$
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 0 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) < 1]$
$p^T[p(X \rightarrow \neg Y) = 0 \Rightarrow p(X \rightarrow \neg Y) < 1]$

• Einfach semi-analytisch

$p^T = 1/2^{n-1}$

$p^T[p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1]$
$p^T[p(X) < 1 \longrightarrow p(X) = 0]$

• Komplex semi-analytisch

$p^T = (3^n + 1)/4^n$

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 1]$
$p^T[p(X \rightarrow \neg Y) > 0 \longrightarrow p(X \rightarrow \neg Y) = 1]$
$p^T[p(X \rightarrow Y) < 1 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 0]$
$p^T[p(X \rightarrow \neg Y) < 1 \longrightarrow p(X \rightarrow \neg Y) = 0]$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0]$
$p^T[p(X \rightarrow \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0]$?

4-5-5 Erweiterungen

Ich möchte hier einige Anmerkungen zur *Modal-Logik* machen. Schon mehrfach habe ich auf die *Verbindungen von Quantoren-Logik und Modal-Logik* hingewiesen. Es lassen sich entsprechend auch Verbindungen zur theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T herstellen. Und zwar gilt:

Quantoren	Modalität	p^T
• alle	notwendig	1
• nicht alle	nicht notwendig	< 1
• einige	möglich	> 0
• nicht einige	nicht möglich	0

In 2-5-5-3 bzw. 2-5-5-4 habe ich – entsprechend zu p – einen Wert *p(modal)*: p^M eingeführt. Dieser gibt dann den *Grad der Modalität* an, am besten sagt man, den *Grad der Notwendigkeit*. Man kann aber auch entsprechend zu p^T einen Modal-Wert p^{TM} einführen, der den Grad der Notwendigkeit eines Schlusses bemisst. ‚p' wie ‚p^T' (in p^M oder p^{TM}) wird hier wieder allgemein für *relative Größe* genommen, steht nicht spezifisch für *Wahrscheinlichkeit*.

Z. B. $p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1$

Dieser Schluss ist, wie ausführlich erläutert, nicht notwendig (nicht tautologisch) und nicht unmöglich (nicht kontradiktorisch). Man kann ihn aber in Abhängigkeit von n genauer bestimmen: $p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n$

Ich hatte gezeigt, dass gilt:

$p^T[p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n] = 1/2^{n-1}$

z. B. für n = 2: $p^T[p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2] = 1/2^{2-1} = 1/2$

Dafür kann man auch sagen bzw. schreiben:

$$p^{TM}[p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2] = 1/2^{2-1} = 1/2$$

Das bedeutet: Der Notwendigkeits-Grad von $p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2$ beträgt 1/2.
Oder: „$p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2$“ ist zu 50% notwendig.

Wir haben uns eben mit der *inklusiven* Modal-Logik befasst, die „möglich“ als „mindestens möglich“ bestimmt, also „notwendig“ nicht ausschließt. Pointiert: bei „mindestens möglich“ ist „notwendig“ möglich.

Die *exklusive* Modal-Logik bestimmt „möglich“ dagegen als „*genau* möglich“, es schließt somit Notwendigkeit aus. Man könnte formulieren:

genau möglich $\Rightarrow$ möglich	$0 < p < 1 \Rightarrow p > 0$
oder: p^{T}[genau möglich $\Rightarrow$ möglich] = 1	$p^{T}[0 < p < 1 \Rightarrow p > 0] = 1$
oder: p^{TM}[genau möglich $\Rightarrow$ möglich] = 1	$p^{TM}[0 < p < 1 \Rightarrow p > 0] = 1$

Die letzte Zeile wäre sprachlich zu formulieren: aus „genau möglich“ folgt *notwendig* „möglich“, also mit einem Notwendigkeits-Grad von $p^{TM} = 1$.