0 GRUNDLAGEN DER LOGIK

ÜBERSICHT

0-1 Logik-Modelle

Hier werden Logik-*Modelle* vorgestellt, d. h. verschiedene Theorien, was Logik ist, wie sie begründet werden kann usw. Ich sehe die Logik in erster Linie als *Wissenschaft von der formalen Welt*, wobei logische Gesetze als *ewige Wahrheiten* verstanden werden können, wenn auch nicht müssen.

0-2 Komponenten

Das sind zuvorderst *Objekte* und *funktionale Relationen* zwischen diesen Objekten.
Objekte sind abstrakt bzw. formal, im genaueren sind es *Individuen*, *Mengen* und *Klassen*, jeweils mit den dazu gehörigen *Eigenschaften* bzw. *Begriffen*.
Logische Relationen sind *funktional*, sie abstrahieren von Raum, Zeit, Kausalität usw. Zu den logische Relationen zählen z. B: „wenn – dann“ / „und“ / „oder“.

0-3 Extension und Intension

Die Extension betrifft *Objekte* (Individuen und Klassen) bzw. *Sachverhalte*. Die Intension betrifft *Eigenschaften* bzw. *Begriffe*, z. B. Allgemein-Begriffe und Individual-Begriffe, außerdem Relationen zwischen Begriffen („Begriffsverhalte“).

0-4 Kopula

Die basale logische Relation ist die *Kopula*, das „ist“, z. B. in: „x ist ein F“. Sie verbirgt sich hinter verschiedenen logischen Relationen wie *Element-Relation*, *Teilmengen-Relation*, *Implikation* u. a.

0-5 Synthetisch und analytisch

Synthetische Relationen beziehen sich auf die reale, *empirische* Welt, ihre Gültigkeit hängt ab von ihren Komponenten. *Analytische* Relationen sind gültig oder ungültig allein auf Grund ihrer logischen Struktur.

Im Punkt „Grundlagen der Logik“ erfolgt eine Darstellung und Klärung logischer Grundbegriffe und Grundaussagen. Allerdings ist es unvermeidbar, hier schon Begriffe und Formalisierungen zu verwenden, die erst in den späteren Kapiteln genauer erläutet werden. Leser, die bereits logische Vorkenntnisse haben, erst recht Logik-Experten, werden dabei keine Schwierigkeiten haben. Andere Leser werden beim *ersten* Lesen nicht alles verstehen, müssen das Kapitel „Grundlagen“ ggf. später noch einmal neu lesen. Diese Einführung ist in manchen Punkten recht knapp gehalten, bestimmte Themen, z. B. *sprachlogischer* bzw. *sprachphilosophischer* Art, werden in meinem in Arbeit befindlichen Buch „*Integrale Philosophie*“ (Arbeitstitel) sehr viel ausführlicher behandelt.

Der Leser, der direkt zur *Logik im engeren Sinne* vordringen möchte, kann dieses Kapitel auch diagonal lesen oder notfalls überspringen; allerdings werden hier bereits wesentliche *Modifikationen* der normalen Logik eingeführt, auf die später zurückgegriffen wird.

0 – 1 LOGIK - MODELLE

0-1-1 Gegenstandsbereiche

0-1-1-1 DREI ANSÄTZE

In der herkömmlichen Logik gibt es vor allem *drei* Ansätze, den Gegenstandsbereich der Logik zu bestimmen:

- *Psyche*
  In der *traditionellen Logik* wurden *psychische* Entitäten, wie *Begriffe* oder *Urteile* bzw. *Gedanken*, als Gegenstand der Logik angesehen, wie auch die Kennzeichnung „Lehre vom folgerichtigen Denken“ zeigt. Der Terminus ‚Begriff‘ kann allerdings auch auf sprachliche oder reale Entitäten angewandt werden.
- *Sprache*
  In der *modernen Logik* gelten primär *sprachliche* Entitäten wie *Prädikate* oder *Sätze* bzw. *Aussagen* als Gegenstände der Logik. Man kann hier von einer sprachlichen bzw. *linguistischen Orientierung* der Logik sprechen.
- *Realität*
  In der *mathematischen* Logik und vor allem in verwandten Disziplinen wie *Mengenlehre* oder *Statistik* bezieht man sich primär auf *reale* Entitäten wie *Ereignisse*, *Sachverhalte* oder *Mengen*. Diese realen Entitäten können allerdings abstrakt sein.

0-1-1-2 VOR- UND NACHTEILE

Alle drei Ansätze haben ihre Vor- und Nachteile:

• *Psyche:* Psychisches wie Gedanken sind uns (in unserem Bewusstsein) *primär* gegeben, Sätze oder Sachverhalte sind nur indirekt gegeben. Aber Psychisches ist schwer zu präzisieren, außerdem besteht die Gefahr des *Psychologismus*, d. h. dass man logische Gesetze mit *psychologischen Denkgesetzen* verwechselt. Logisch wahr wäre dann das, was die meisten Menschen denken bzw. für logisch korrekt halten; doch wir wissen aus Untersuchungen, dass die Menschen in ihrem Denken viele logische Fehler begehen.

• *Sprache:* Ein Satz ist präziser zu fassen und zu beschreiben als ein Gedanke. Allerdings besteht hier folgende Unklarheit: Zum einen bezieht man sich auf (Aussage-) *Sätze* als *syntaktische* Gebilde, zum anderen bezieht man sich – *semantisch* – auf *Aussagen* (oder *Propositionen*), die man als *Bedeutungen* von Sätzen auffassen könnte; Bedeutungen sind aber ebenfalls schwer zu fassen, andererseits werden sie in erster Linie wieder als reale oder auch psychische Entitäten interpretiert, so dass hier kein eigenständiger Bereich gegeben ist. Generell gilt: Sprachliche Zeichen stehen nicht für sich selbst, sondern sie *bezeichnen* oder benennen etwas. Nur in Bezug auf dieses Bezeichnete lassen sie sich letztlich verstehen.

Außerdem gibt es die Ungereimtheit, dass man sich auf der *oberen* Ebene – sprachlich – auf Sätze/Aussagen bezieht, auf der *unteren* Ebene – real – doch auf Individuen bzw. Klassen. So formuliert man z. B. in der Prädikaten-Logik: $a \in F$ (das Individuum a ist Element der Klasse F), hier ist also eindeutig von *realen* Entitäten die Rede. Der durchgängige Bezug auf Wörter bzw. Zeichen wäre eben sehr kompliziert, falls man von rein syntaktischen Analysen absieht. Wenn man wirklich konsequent einen *sprachlichen* bzw. *linguistischen* Ansatz durchziehen wollte, also ausschließlich über sprachliche Entitäten sprechen wollte, dann müsste man jeden Satz bzw. jedes Wort – *meta-sprachlich* – in *Anführungszeichen* schreiben, was aber doch nicht getan wird.

• *Realität*: So spricht vieles dafür, die *reale* Ebene als fundamental anzusetzen. Denn erstens erhalten sprachliche Zeichen wie auch psychische Repräsentationen ihre Bedeutung normalerweise nur durch den Bezug auf die Realität. Zweitens hat Logik es mit *Wahrheit*, Richtigkeit, Gültigkeit u. ä. zu tun. Um aber (sprachlich) einen Satz oder (psychisch) einen Gedanken als wahr bzw. falsch zu kennzeichnen, gibt man an, ob er mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Auf einen extremen *Konstruktivismus* oder Idealismus, der Wahrheit nur noch im Subjekt selbst gegeben sieht, braucht hier nicht eingegangen zu werden. Allerdings gibt es auch bei der realistischen Theorie Probleme, z. B. „negative Sachverhalte“, also „nicht bestehende Sachverhalte“. Außerdem werden wir noch sehen, dass dieser Bezug auf die Wirklichkeit bei *analytischen* Aussagen nur noch indirekt gegeben ist.

Letztlich bietet sich eine Deutung der Logik an, die zwar realistisch orientiert ist, aber auf eine abstrakte, formale Welt Bezug nimmt; das wird in der *Integralen Logik* verwirklicht.

0-1-1-3 LOGIK ALS THEORIE DER FORMALEN WELT

Die *Integral-Logik* geht davon aus, dass die Logik unabhängig von den obigen Interpretationen ist. Für die *Philosophie* ist es von Bedeutung, ob man von *Sätzen*, *Sachverhalten* oder *Urteilen* ausgeht, für die *Logik* ist es letztlich irrelevant. Man kann sie auf alle drei Bereiche beziehen. Sinnvoller ist aber, sie unabhängig von diesen Bereichen zu definieren. So gehe ich vorrangig – ontologisch *neutral* – von *Relationen* oder Strukturen aus, anstatt von Sachverhalten, Sätzen oder Urteilen.

Die Logik betrifft die Welt der *abstrakten Formen*: In ihr spielen Materie, Zeit, Raum, Energie aber auch Bewusstsein usw. keine Rolle, sondern nur *funktionale Abhängigkeiten* oder *korrelative Beziehungen*. Die Gesetze der Logik gelten in jeder anderen Welt, also der psychischen, der sprachlichen und der materiellen Welt. Bzw. kann man die Gesetze der Logik auf jede andere Welt anwenden.

Wenn sich die Integrale Logik auch auf abstrakte Entitäten bezieht, so steht sie doch der realistischen Interpretation am nächsten, weil sich dies gerade im Bereich von Objekten anbietet. Insofern baue ich die Logik auch von den *Objekten* her auf und nicht, wie sonst häufig, von den sprachlichen Zeichen, also z. B. Eigennamen und Prädikatoren.

Wenn man also die Logik realistisch deuten kann, so ist doch folgendes zu bedenken: Es geht in der Logik nie um konkrete Dinge, Klassen von konkreten Dingen oder Relationen zwischen konkreten Dingen, sondern nur um die *Form.* Anders gesagt, es geht um eine abstrakte Welt, mit abstrakten Dingen usw.

Zuweilen bietet es sich aber an, bei der Darstellung bestimmter logischer Probleme doch auf eine konkrete, z. B. sprachliche Spezifizierung, etwas *Aussagesätze*, Bezug zu nehmen. Und bei *Beispielen* muss man ohnehin aus der abstrakten Welt zur konkreten Welt hinabsteigen.

Außerdem, trivialerweise muss sich eine (schriftliche) Arbeit über Logik notwendig der sprachlichen Zeichen bedienen. Das wird noch genauer erläutert werden.

0-1-1-4 ABGRENZUNG DER LOGIK VON DER MATHEMATIK

Diese Abgrenzung ist kompliziert und kann hier nicht im Einzelnen dargestellt werden. Üblicherweise sieht man die Logik als die *fundamentalere* Theorie an, aus der sich die Mathematik abzuleiten lässt. Andererseits kann man sagen, dass die herkömmliche Logik *qualitativ* strukturiert ist, die Mathematik dagegen *quantitativ*. Die Logik liefert die Basis, die Mathematik die speziellere Ausformung. Die Integrative Logik bemüht sich – durch Quantifizierung logischer Strukturen – um eine *Verbindung von Logik und Mathematik*. Das betrifft vor allem *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Statistik*.

0-1-1-5 TERMINOLOGIE
Wegen der ontologischen Unabhängigkeit der *Integral-Logik* wird prinzipiell auch eine Sprache bevorzugt, die nicht festgelegt ist auf eine bestimmte Interpretation. Da aber ein Großteil der Begrifflichkeit der modernen Logik sich auf Sprache, insbesondere *Aussagen* bezieht, werde ich teilweise diese Terminologie übernehmen. Z. B. verwende ich auch weitgehend den Begriff der ‚*Wahrheitswerte-Tafel'* oder kurz ‚Wahrheits-Tafel', der sich auf Aussagen bezieht. Dieser Terminus ist eingeführt, und es bedeutet keine Tugend, unnötig viele neue Termini einzuführen. Korrekter wäre in meinem Ansatz allerdings der Terminus ‚*Gültigkeits-Tafel'*, da ich den zu engen Begriff der *Wahrheit* (weitgehend) durch den Begriff der *Gültigkeit* oder *Belegung* ersetze. Andererseits bevorzuge ich im Bereiche der Objekte eine realistische Sprache, da die anderen Ansätze sehr kompliziert sind.

0-1-2 Inhalt der Logik

Der Begriff ‚Logik' stammt von griechisch ‚*logos*', das bedeutet Wort, Rede, übertragen Vernunft, Gedanke, Sinn, auch Weltgesetz. Man kann die Logik daher – *kommunikationstheoretisch* – als Lehre von der (vernünftigen) Argumentation oder vom (rationalen) Diskurs bestimmen. Ich ziehe aber eine *deskriptive* Definition vor und verstehe als Inhalt der Logik primär die gesamte *formale Welt*, vorrangig allerdings die *analytischen Relationen*. Der Inhalt der Logik lässt sich dabei enger oder weiter definieren. Nachfolgend werden die wichtigsten Definitionen aufgeführt. Die beziehen sich primär auf die *philosophische Logik*, die *mathematische Logik* wird oft in spezieller, mehr technischer Weise definiert.

0-1-2-1 FORMALE WELT
Dies ist die *weiteste* Definition der Logik. Sie entspricht in etwa der Auffassung der *traditionellen* Logik, wenn dort auch von Begriffen, Urteilen usw. gesprochen wird. Aus Sicht einer realistisch-formalen Logik gehören dazu vor allem:

- *Objekte*: Individuen, Mengen bzw. Klassen von Individuen
- *Eigenschaften*, Begriffe
- *funktionale Relationen*: analytische, synthetische
- *Systeme*, als komplexe Gebilde

0-1-2-2 FUNKTIONALE RELATIONEN
Hier werden nur funktionale Relationen zur Logik gezählt, *funktionale Abhängigkeiten*, d. h.:

• *synthetische* Relationen,
sie können empirisch wahr sein oder falsch, z. B.

Implikation	$\rightarrow$	$X \rightarrow Y$	wenn X, dann Y
Äquivalenz	$\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$	wenn X, dann und nur dann Y

• *analytische* Relationen
sie sind immer wahr (oder immer falsch), z. B.

analytische Implikation	$\Rightarrow$	$X \Rightarrow X$	wenn X, dann X
analytische Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	$X \Leftrightarrow X$	wenn X, dann und nur dann X

Z. B. die analytische Implikation $X \Rightarrow X$: „Wenn X gültig ist, dann ist es sicher, dass X gültig ist"; um das zu beweisen, braucht man *keine empirischen* Untersuchungen zu machen, sondern nur den Sachverhalt zu analysieren (analytisch). Ob aber es gilt $X \rightarrow Y$: „Wenn X gültig ist, ist auch Y gültig", dass muss *empirisch* untersucht werden (synthetisch).

Dieselbe Unterscheidung kann man auch für die *Mathematik* machen, obwohl das hier meist versäumt wird:

- synthetische Relation
  = (Gleichheit, gleich groß): $X = Y$, X ist gleich groß wie Y
- analytische Relation
  ≡ (analytische Gleichheit): $X \equiv X$, X ist gleich groß wie X

0-1-2-3 ANALYTISCHE RELATIONEN

Bei dieser Bestimmung der Logik werden die synthetischen Relationen ausgegliedert. Nur die *analytischen* gelten als logisch.

Dies betrifft nicht nur die bisher angeführten Relationen, ⇒, ⇔ und ⇐, sondern auch andere, z. B.:

∨ (*Disjunktion*): $X \vee \neg X$, sprachlich X oder nicht X
(ich schreibe das genauer $X \,^{+}\!\vee^{+} X$, aber dies wird später erklärt)
>< (*Kontravalenz*): $X \,^{+}\!{><}^{+} \neg X$, sprachlich *entweder* X oder nicht X

Hier kann man auch *partiell analytische* Relationen miteinbeziehen, z. B.: $X \longrightarrow X \wedge Y$. Üblicherweise werden in der Logik – abgegrenzt von den *synthetischen* Relationen – nur vollständig *analytische* Relationen unterschieden. Ich werde aber zeigen, dass man sinnvoll *partiell analytische* Relationen einführen kann: sie entsprechen quantitativ *induktiven* bzw. *induktiv-statistischen* Relationen.

0-1-2-4 STRENG ANALYTISCHE RELATIONEN

Bei diesem Logik-Modell werden partiell analytische Relationen ausgegliedert, nur die *streng analytischen* gelten als logisch.

Bei den streng analytischen kann man genauer unterscheiden:

- *Tautologien*: sie sind grundsätzlich wahr
  z. B. $X \vee \neg X$: *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*
- *Kontradiktionen*: sie sind grundsätzlich falsch
  z. B. $X \wedge \neg X$: *Satz vom Widerspruch*

0-1-2-5 LOGISCHE FOLGERUNGEN

Eine weitere letzte Einengung ist, dass als Logik nur analytische *Folgerungs-Beziehungen* gelten. Das ist zuvorderst die *analytische Implikation* ⇒, der *logische Schluss*, aber auch die analytische Äquivalenz ⇔ und die analytische Replikation ⇐.

Auch hier ist wieder zwischen Tautologie und Kontradiktion zu unterscheiden:

- *Tautologien*
  z. B. $X \Leftrightarrow X$ (X ist äquivalent mit X)
- *Kontradiktionen*
  z. B. $X \not\Leftrightarrow \neg X$ (X ist nicht äquivalent mit nicht X)

Ich wähle die *weiteste* Definition (wie in 0-1-2-1), der *Kernbereich* der Logik sind allerdings *analytische Relationen*, und zuvorderst logische Folgerungen bzw. *logische Schlüsse*.

0-1-3 Objektbereich – Metabereich

0-1-3-1 OBJEKT-SPRACHE / META-SPRACHE
Will man die Logik bestimmen, so kann man erstens *objekt-sprachlich* fragen: Was ist Logik? (Real-Definition). Und zweitens *meta-sprachlich*: Was ist die Bedeutung des Begriffs ‚Logik'? (Nominal-Definition)

Für den normalen Gebrauch ist aber der Unterschied zwischen diesen beiden Aspekten vernachlässigbar, dagegen spielt er in der *Sprachphilosophie* und *Ontologie* eine gewichtige Rolle. Denn damit verbunden ist das Problem, ob es so etwas wie ein Wesen der Dinge und damit auch ein *Wesen* der Logik gibt.

0-1-3-2 LOGIK ALS OBJEKTBEREICH
Man bezeichnet als Logik zum einen die Objekte, Klassen, Begriffe und Relationen selbst – je nach Weite der Definition. Logik ist dann gewissermaßen die Gesamtheit der formalen Welt. Eben die *logische Welt*. Diese Redeweise ist weit verbreitet, vor allem, wenn man mit Logik nur die logischen Relationen oder Strukturen meint.

Man spricht auch von „Logik der Gefühle, „Logik der Liebe“ usw., obwohl dies eigentlich gar nichts mit Logik zu tun hat. Man meint hier einfach die *Regeln*, nach denen z. B. die Liebe „funktioniert“; diese Regeln sind aber zuvorderst empirische, etwa psychologische Gesetzmäßigkeiten, keine logischen.

Auch wenn man die weiteste Definition der Logik wählt (vgl. 0-1-2), ist es nicht trivial, was genau zu dieser logischen Welt gehört. Offensichtlich muss man die *kontradiktorischen* Relationen hinzuzählen, es wäre absurd, sie aus der Logik zu verbannen. Dies ist anders als bei der Bestimmung der realen Welt, wo es wenig Sinn hat, auch „negative Tatsachen“ zur Welt hinzuzählen. Andererseits ist es befremdlich, dass widersprüchliche, somit „unmögliche“ Relationen in der logischen Welt vorkommen sollen.

Aber auch die nicht widersprüchlichen Relationen werfen Probleme auf: gehört zur formalen Welt *jede* mögliche Relation bzw. jede mögliche Kombination? $X \rightarrow Y$ gehört sicherlich zur Logik. Dann wohl auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2$, dann auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3$. Gibt es hier ein Ende? Gehört auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3 \wedge \ldots$ mit *unendlich* vielen Gliedern zur Logik-Welt?

0-1-3-3 LOGIK ALS ERZEUGUNGSSYSTEM
Man kann das Problem der Gesamtheit aller logischen Kombination umgehen, wenn man Logik quasi nicht als die *Menge* aller Produkte darstellt, sondern als das *System*, welches diese Produkte *hervorbringt*.

Die gleiche Problematik kennt man aus der Sprachwissenschaft: Gehören zu einer Sprache alle korrekt gebildeten Sätze oder sogar Texte? Oder ist alternativer Ansatz besser? Eine Sprache beinhaltet demnach bestimmte *Elemente* und *Regeln*, wie diese Elemente korrekt – zu Sätzen, Texten usw. – verknüpft und interpretiert werden können, also eine *Grammatik* einschließlich Vokabular.

Ähnlich kann man in der Logik vorgehen: Man bestimmt die Logik dann nicht als die Gesamtheit logischer Verknüpfungen (statisch). Sondern die Logik wird – konstruktiv – definiert durch *Elemente* und *Verknüpfungsregeln* – zum Verhältnis von Logik und Sprache komme ich noch. Man könnte dann unterscheiden zwischen erstens Logik und zweitens logischer (oder formaler, idealer) Welt, als Klasse oder System aller logischen Entitäten, nämlich Elementen wie Verknüpfungen. Mit dieser *konstruktivistischen* Sicht ist aber bereits ein Übergang vollzogen zur Bestimmung der *Logik als Lehre*.

0-1-3-4 LOGIK ALS THEORIE ODER LEHRE

Der obigen Bestimmung der Logik als *Objektbereich* steht eine andere Definition gegenüber: Logik ist dann die *Lehre*, die *Theorie* oder die *Wissenschaft* von der abstrakten Welt, von den analytischen Relationen oder vom folgerichtigen Denken (je nach Definition). So gehört die Logik als Disziplin zur *Philosophie* – als *mathematische Logik* wird sie der Mathematik zugeordnet. Man kann diese Lehre auch *normativ* auffassen bzw. als *Handlungsanweisung*: sie lehrt uns, wie wir *korrekt* logisch folgern oder wie wir denken *sollen*.

0-1-3-5 ÜBEREINSTIMMUNG VON OBJEKT-ASPEKT UND META-ASPEKT

Man könnte den Bezug auf die Logik als *Menge bzw. System formaler Relationen* als *Objekt-Aspekt* bezeichnen, dagegen den Bezug auf die Logik als *Theorie* als *Meta-Aspekt* (verwandt der Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache). M. E. sind sowohl der Objekt- wie der Meta-Sprachgebrauch akzeptabel. Ähnlich spricht man z. B. auch von ‚Biologie': meint damit einmal *das Leben selbst*, einmal die *Wissenschaft vom Leben*.

Ich vertrete aber darüber hinaus die Auffassung, dass bei der Logik Objekt-Bereich und Meta-Bereich quasi zusammenfallen.

$X \vee Y$ kann man z. B. als *Relation* ansehen oder als Bezeichnung bzw. *Beschreibung der Relation*. Daher halte ich hier eine strenge Unterscheidung von Objekt- und Meta-Sprache in der Praxis normalerweise für unnötig. Nur wenn man die meta-sprachliche Verwendung herausstellen möchte, sollte man im Beispiel ‚$X \vee Y$' schreiben.

Dies ist anders als bei einer *empirischen Wissenschaft*. Bei einer empirischen Wissenschaft ist man gut beraten, den Objekt-Bereich nicht mit dem Meta-Bereich zu identifizieren, auch wenn man denselben Begriff verwenden mag.

Genauer kann man das beim *Gesetz* unterscheiden. Ein Gesetz kann zweierlei bedeuten:

1. *Gesetzmäßigkeit*
   die dem Objekt inhärente Weise des Funktionierens
2. *Gesetzesaussage*
   die sprachlich formulierte Theorie über das Funktionieren

Z. B. gibt es offensichtlich eine Gesetzmäßigkeit des Alterns. Aber wir kennen sie bis heute nicht genau, es gibt verschieden Theorien, die das Altern beschreiben und erklären, aber keine erfasst vollständig und fehlerfrei die Gesetzmäßigkeit.

Es ist wichtig, diese beiden Bereiche auseinander zu halten. Nur ein platter *Naturalismus* („unsere Sätze spiegeln die Wirklichkeit eins zu eins") oder ein platter *Konstruktivismus* („es gibt nur die Gesetze, die wir selbst konstruieren, die Wirklichkeit selbst ist unstrukturiert") nivelliert diesen Unterschied. Denn es ist offensichtlich, dass unsere Gesetze nie absolut die realen Gesetzmäßigkeiten erfassen, sondern immer nur annäherungsweise.

Dagegen kann man bei der Logik annehmen, dass diese beiden Bereiche zusammenfallen, auch wenn sie sprachlich auseinander zu halten sind.

Angenommen, man betrachtet die Relation $X \to Y$. Wenn die Beschreibung dieser Relation ‚$X \to Y$' ist, so ist die Übereinstimmung zwischen Relation und Beschreibung offensichtlich.

Zwar könnte man auch andere Beschreibungen, logische Umformungen mit gleichem Wahrheitswert verwenden; so ist z. B. die Relation $X \to Y$ *logisch äquivalent* mit $\neg X \vee Y$ oder mit $\neg(X \wedge \neg Y)$.

Theoretisch könnte man zwar behaupten: $X \to Y$ ist die *reale* Relation. ‚$X \to Y$', ‚$\neg X \vee Y$' oder ‚$\neg(X \wedge \neg Y)$' sind dagegen verschiedene Beschreibungen von $X \to Y$, die in unterschiedlichem Ausmaß zutreffen. Aber das ist wenig überzeugend, wenn sich auch Bedeutungs-Unterschiede zwischen den verschiedenen Ausdrücken angeben lassen, wozu ich später noch komme.

0-1-4 Gültigkeit

Die *Begründung* bzw. Gültigkeit der Logik ist sehr umstritten. Zunächst wäre zu fragen, was überhaupt ‚Begründung' bedeuten soll. Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf logischen *Aussagen* bzw. (Relationen), so lässt sich fordern: Logische Aussagen müssen *wahr* sein. Es kann hier nicht die Problematik von *Wahrheitstheorien* bzw. der Definition des Wahrheitsbegriffes verfolgt werden. ‚Wahrheit' heißt in allgemeinster Weise: *Übereinstimmung*. Übereinstimmung mit der empirischen Realität, mit der geistigen, formalen Realität, mit unserem Denken oder einfach bestimmten Regeln. Mit welchem Bereich die Logik übereinstimmen soll und wie das erkannt werden kann, darüber gibt es viele verschiedene Theorien.

Es sind vor allem folgende Positionen zu unterscheiden: *Konventionalismus*, *Empirismus*, *Linguismus*, *Kognitivismus* und *Idealismus*.

0-1-4-1 KONVENTION

Das ist die heute am meisten vertretene Auffassung: Es werden *Axiome* und *Ableitungsregeln* festgesetzt, ggf. noch semantische Regeln. Diese *Festsetzungen* sind zwar begründet, aber letztlich nur *pragmatisch*, dass sie sich als *nützlich* erweisen. Es geht nicht um absolute Wahrheiten. Was dann abgeleitet wird aus den Axiomen, hat *innerhalb* dieses Systems absolute Gültigkeit, aber eben nur relativ zu den Axiomen. Die Axiome und die Regeln selbst sind Setzungen, wir *konstruieren* sie aus unserem Denken. Diese Position, die man weiter differenzieren könnte, nennt sich *Konventionalismus*, *Konstruktivismus* oder *Pragmatismus*.

Für diese Theorie mag sprechen, dass es unterschiedliche Logiken oder Logikkalküle gibt. Aber man kann dennoch eine *Basis-Logik* postulieren, auf die alle anderen Logiken Bezug nehmen müssen, und es ist kaum begründbar, dass die Basis-Logik letztlich willkürlich sein soll. In ihr muss z. B. der *Satz vom ausgeschlossen Widerspruch* gelten. Bestimmte Logik-Systeme wie die *Fuzzy-Logik* oder auch die sogenannte *Quanten-Logik* hebeln dieses Grundgesetz nicht aus, obwohl dies oft fälschlich behauptet wird.

0-1-4-2 EMPIRIE

Nur noch selten wird heute behauptet, dass die Logik aus der *Empirie* abgeleitet ist. Diese Position nennt sich *Empirismus* oder *Realismus*. Man könnte z. B. argumentieren: Wir nehmen wahr, beobachten, dass etwas nicht gleichzeitig blau und nicht blau sein kann, also z. B. blau und rot. Aus solchen Erkenntnissen könnte man dann ein allgemeines logisches Gesetz ableiten: Etwas kann nicht zugleich eine Eigenschaft und die entgegengesetzte Eigenschaft besitzen. Logische Gesetze wären dann im Grunde *Real-Gesetze*.

Es ist richtig, dass wir die logischen Gesetze in der empirischen Wirklichkeit vorfinden, aber d. h. heißt nicht, dass sie von daher begründet wären. Ein Beweis aus der Beobachtung bliebe ja immer *induktiv*, wir könnten aus *endlich* vielen Beobachtungen kein unbegrenztes Gesetz ableiten, das für *unendlich* viele, für alle Fälle, sichere Erkenntnis garantiert. Dieses Problem stellt sich auch in den *empirischen Wissenschaften*, aber da ist es akzeptabel; doch *logische* Gesetze sind eben auch gerade dadurch unterschieden von *empirischen* Gesetzen, dass sie vollständig gesicherte Gültigkeit beanspruchen.

0-1-4-3 SPRACHE

Das Argument lautet: Logische Strukturen sind letztlich *Sprachstrukturen*, *logische* Gesetze sind somit letztlich *grammatische* Gesetze. Man könnte diese Position *Linguismus* nennen. Ein Vorteil dieser Position ist, dass uns Sprachstrukturen gut zugänglich, gut erkennbar sind.

In der Tat ist die Logik eng mit der Sprache verwandt, schon deshalb, weil wir logische Aussagen, wie andere Aussagen, in Sprache ausdrücken müssen. Aber es gibt offensichtlich sehr unterschiedlich strukturierte Sprachen, und in allen kann man logische Aussagen machen.

Zwar gibt es auch *Sprach-Universalien*, aber es dürfte kaum gelingen, alle logischen Strukturen als solche Universalien darzustellen. Auch die Annahme einer einheitlichen logischen *Tiefenstruktur*, die der unterschiedlichen *Oberflächenstruktur* zugrunde liegt, hilf nicht weiter. Es ist kaum vorstellbar, dass die Sprache eine bestimmte Logik erzwingt.

Außerdem hat man eigene *logische Sprachen* entwickelt. Die lassen sich zwar partiell auf natürliche Sprachen übertragen, aber eben nur partiell. Z. B. ist die sprachliche *Subjekt-Prädikat*-Struktur (bzw. Subjekt-Prädikat-Objekt-Struktur) doch strukturell verschieden von der formal-logischen *Argument-Prädikat-Struktur*, wie noch gezeigt werden soll.

Aber entscheidend ist: Die Berufung auf die Sprache könnte letztlich nur dazu dienen zu erklären, wie Logik *entstanden* ist, aber kann sie keinesfalls in ihrer Gültigkeit begründen. Denn man geriete dann in einen Regress, man müsste ja *weiter* begründen, warum sprachliche Strukturen gültig sind, was auch immer das bei der Sprache bedeuten soll – in erster Linie könnte es ja nur um eine Übereinstimung mit der empirischen Realität gehen.

Man kann jedenfalls mühelos einen *grammatisch korrekten* Satz formulieren, der dennoch *logisch falsch* ist, z. B.: ‚Wenn alle Menschen Säugetiere sind, dann sind auch alle Säugetiere Menschen'. Allein dies zeigt schon, dass man Logik und Sprache nicht identifizieren darf.

0-1-4-4 DENKEN

Dies ist die nach dem Konventionalismus heute verbreitetste Auffassung, die auch schon eine lange philosophiegeschichtliche Tradition besitzt: Logische Strukturen sind *kognitive* Strukturen, sind *Denkstrukturen*. Und zwar geht man dabei normalerweise davon aus, es sind *angeborene* Denkstrukturen, denn sonst müsste man letztlich auf einen Empirismus zurückgreifen. Diese Position kann man *Kognitivismus*, *Rationalismus* oder *Mentalismus* nennen.

Die Argumentation ist hier stringenter als bei der Sprache. Es mag zwar auch verschiedene Denkstile geben, aber letztlich nur *ein* Denken. D. h. wir können nur soweit logisch denken, wie unsere Denkstrukturen das zulassen. Und es ist wahr, wir können die logischen Gesetze nur erkennen, wenn unser Denken das erlaubt.

Aber ähnlich wie bei der Sprache ist das Problem: Wir können so die *Herkunft* der Logik erklären, aber lässt sie sich so *begründen*? Es ist doch erwiesen, dass viele Menschen in vielen Situationen *unlogisch denken*. Die logischen Strukturen können also keine reinen Abbildungen der Denkstrukturen sein. Es hilft auch kaum weiter, hier statistisch vorzugehen und zu sagen, die Mehrheit hat Recht, so wie die Mehrheit denkt, das ist logisch. Aus diesen Gründen ist ja der *Psychologismus*, die *psychologische Begründung* der Logik, immer wieder abgelehnt worden.

Interessant ist hier: Kaum ein Mensch, der nicht logisch geschult ist, wird *bewusst* und explizit logische Gesetze angeben können. Offensichtlich verfügt der Mensch also *unbewusst* über einige logische Regeln, da er doch in Grenzen zu logischem Denken befähigt ist. Dieses Phänomen, dass wir unbewusst „klüger" sind als bewusst, tritt allerdings nicht nur bei der Logik auf: Z. B. können alle (gesunden) Menschen halbwegs fehlerfrei ihre Muttersprache sprechen, aber kaum einer kennt die relevanten grammatischen Regeln, von komplizierten linguistischen Konstruktionen gar nicht zu sprechen.

Bezieht man allerdings die *evolutionäre Erkenntnistheorie* mit ein, können sich die Argumente für eine kognitivistische Logikbegründung verstärken. Man kann argumentieren: Unser – logisches – Denken hat sich im Zuge der *Evolution* herausgebildet und optimiert; wenn es nicht korrekt wäre, hätten wir als Art nicht überlebt. Nehmen wir als simples Beispiel: „Alle (bekannten) Löwen sind gefährlich, dies ist ein Löwe, also ist er gefährlich". Wenn es dem

Menschen nicht gelungen wäre, solche realistischen logischen Strukturen zu entwickeln und entsprechend zu handeln bzw. zu reagieren, dann hätte er keine Chance gehabt, zu überleben. Pointiert könnte die These lauten: Man begründet die Logik durch den Selektionsvorteil, je mehr ein Denken die Überlebenschance erhöht, desto logischer ist es.

Diese Argumentation ist nicht ganz von der Hand zu weisen, aber sie hat auch ihre Mängel. Denn es zeigt sich doch, dass die Menschheit und einzelne Menschen überleben, *obwohl* sie vielfach unlogisch denken. Oder sogar *weil*? U. U. ist logisches Denken in gewissen Situationen gerade für das Überleben hinderlich, weil es das Handeln lähmen kann, wenn man zu genau die Möglichkeiten des Handelns und deren wahrscheinliche Konsequenzen abschätzt.

0-1-4-5 ABSOLUTE IDEEN

So komme ich zu dem Ergebnis, dass die *beste Erklärung* ist: Logische Strukturen sind Strukturen einer *formalen Welt*, die *unabhängig vom Menschen* existiert, unabhängig von seinem Denken und Sprechen, von seinen Wahrnehmungen und erst recht Festsetzungen. Logische Basis-Gesetze sind „*Ideen*“, *ewige Wahrheiten;* das gilt nicht für jeden spezialisierten Logikkalkül. Ich vertrete die – zunächst vielleicht altmodisch anmutende – Auffassung, dass die Logik am besten als ein System *idealer Entitäten* verstanden werden kann. Diese Position kann man als *Platonismus* oder *Idealismus* bezeichnen. Die Logik wird hier so *begründet*, dass sie die Struktur einer idealen, formalen Welt ist bzw. als Lehre diese Welt beschreibt.

Wie ist es dem Menschen möglich, die logischen „Ideen“ zu erkennen? Weil er das kognitive Potential dazu hat. Das ist die einfachste Erklärung, allerdings keine völlig ausreichende.

Man könnte auf die klassischen Erklärungen verweisen wie *Erinnerung* an eine frühere geistige Existenz, höheres Erkennen usw. Dies ist aber aus heutiger Sicht sehr spekulativ. Da ein empirischer oder sprachlicher Zugang kaum in Frage kommt, muss man auf die Kognition verweisen: die *angeborene* Befähigung zum logischen Denken bzw. angeborene logische Ideen. Auch wenn der Mensch die Fähigkeit zum korrekten logischen Denken besitzt, bedeutet das ja noch nicht, dass er zwangsläufig *immer* logisch denkt. Von daher genügt es auch nicht zu sagen: Logische Gesetze sind *evident*, also unmittelbar einsichtig und unbestreitbar; denn es mag auch möglich sein, sich über Evidenz zu irren – außerdem besitzen unterschiedliche Strukturen der Logik sicher unterschiedliche Evidenz; z. B. ist die Definition der logischen *Implikation* sicher keinesfalls evident, wie noch sehr genau diskutiert werden wird.

Eine wirklich überzeugende Theorie, wie die Logik zu begründen ist und wie wir die Logik erkennen können, steht noch aus. Sie wird vermutlich folgende Faktoren umfassen müssen: angeborene Denkstrukturen, evolutionärer Erfolg, eventuell auch Kriterien der Ästhetik; vielleicht müssen auch *alle* oben genannten Begründungsfaktoren integriert werden.

0-1-5 Sprache

0-1-5-1 RELEVANZ DER SPRACHE

Eine Sprache ist ein *Zeichensystem*, mit dem wir Dinge *bezeichnen* bzw. *Aussagen* über sie machen können. Somit kann man bei einer Sprache prinzipiell unterscheiden:

- die *Form* (Syntax) der Zeichen, z. B. Ketten von Buchstaben oder Lautfolgen
- die *Bedeutung* der Zeichen, vor allem die bezeichneten Dinge bzw. Aussagen

Dabei beruht die *Zuordnung* von Zeichen zu Gegenständen normalerweise auf Festsetzungen bzw. Regeln, ist also nicht natürlich gegeben.

Die Syntax wird von der *Syntaktik* oder Grammatik beschrieben, die Bedeutung von der *Semantik*, wobei eine strikte Trennung von Form und Bedeutung allerdings nicht gegeben ist.

Eine *normale* oder *natürliche* Sprache, wie z. B. Deutsch, besitzt aber zusätzlich eine *pragmatische* Dimension: Denn sie hat nicht nur eine *Darstellungs*-Funktion, sondern kommunikative Funktionen wie *Appell*-, *Ausdrucks*- und *Diskussions*-Funktion, sie erlaubt Fragen und Befehle, alles eingebettet in einen Prozess der *Kommunikation* oder *Interaktion*. Man kann mit ihr Handlungen vollziehen (*Sprechhandlung*), seine Gefühle ausdrücken, andere Menschen beeinflussen u. v. m. Für Beispiele aus der normalen Sprache verwende ich hier fast ausschließlich die *deutsche* Sprache. Bei Englisch oder Französisch würden sich sehr ähnliche Resultate ergeben; natürlich gibt es auch normale Sprachen, die ganz anders strukturiert sind, aber in den *sprachlichen Universalien* stimmen sie dennoch alle überein – und es geht hier ja nicht um eine Arbeit über Sprachphilosophie oder Sprachvergleiche.

Man spricht auch von *logischer Sprache* oder *logischer Grammatik*. Dabei wird die logische Sprache als *künstliche*, *formale* Sprache bestimmt. Es ist wahr, dass eine solche formale Sprache der Logik entspricht. Denn die Logik ist in erster Linie *formale Logik*. Die Logik *abstrahiert* von *konkreten Bedeutungen*, sie verwendet *Variablen* wie ‚X' und ‚Y'. Sie stellt z. B. ein *Gesetz* auf wie: $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Hier ist es gleichgültig, was man für die Variablen ‚X' und ‚Y' einsetzt, das Gesetz gilt unabhängig davon. Dennoch darf man nicht verwechseln: Die Logik im eigentlichen Sinn *ist keine Sprache*, sie *bedient* sich nur einer Sprache: Man kann z. B. *logische Gesetze* auch in der *Alltagssprache* ausdrücken, wenn man Variablen der Alltagssprache wie ‚irgendein' verwendet, z. B.:

$X \Rightarrow \neg\neg X$. Übersetzt in normale Sprache: „Wenn irgendeine beliebige Aussage wahr ist, dann ist es nicht wahr, dass ihre Negation wahr ist".

Oder: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$: „Wenn *alle* Dinge eine bestimmte Eigenschaft haben, dann haben auch (mindestens) *einige* Dinge diese Eigenschaft".

Anders sieht es aus bei einer *konkreten* Aussage in Normalsprache unter Verwendung von *Konstanten*, z. B.: „Wenn es regnet, dann ist es nicht wahr, dass es nicht regnet". Diese Aussage ist zwar logisch wahr, aber sie *kein logisches Gesetz*.

Generell sind die logischen Sprachen zwar *exakter*, aber viel *beschränkter* als normale, natürliche Sprachen. Vor allem umfassen die natürlichen Sprachen *alle* Bereiche der Realität, während sich die logische Sprache im eigentlichen Sinn nur auf *funktionale Abhängigkeiten* bezieht (wie: *wenn* X, *dann* Y). Zwar kann man eine formale Sprache konstruieren, in der z. B. auch *Ort* und *Zeit* vorkommen, aber das ist keine im strengen Sinne logische Sprache mehr. Nicht jede formale Sprache ist eine logische Sprache.

0-1-5-2 ALPHABET

Wir kennen in der natürlichen Sprache ein *Alphabet*, das über viele *Wortklassen* verfügt, z. B. Substantive, Adjektive, Verben u. a. Auch eine logische Sprache hat ein Alphabet. Es ist je nach Logik unterschiedlich, aber viel ärmer. Z. B. enthält es *Individuen-Zeichen* (wie ‚a' oder ‚x') und *Klassen-Zeichen* (wie ‚F`) sowie *logische Zeichen* (wie ‚$\rightarrow$' oder ‚$\wedge$').

Diese Zeichen unterscheiden sich von denen in normaler Sprache, und zwar sind sie primär dafür verantwortlich, dass man die Logik „*formal*" nennt. Mit der Kennzeichnung „formal" meint man nämlich mehrere verschiedene Eigenschaften – auch wenn das normalerweise nicht reflektiert wird.

• *Abkürzungen*

Anstatt (aus Buchstaben bzw. Lauten zusammengesetzte) *Wörter* in der Normalsprache, verwendet man in der Logik-Sprache überwiegend einzelne *Buchstaben*: statt ‚Sokrates' mag z. B. kurz ‚a' stehen. Statt ‚entweder - oder' steht kurz das *graphische Symbol* ‚><'. Die Abkürzungen bewirken, dass ein Satz viel *kürzer* und übersichtlicher ist als in der Normal-Sprache.

• *Variablen*

Es werden überwiegend *Variablen* verwendet, z. B.: ‚x' steht für *irgendein* individuelles Objekt, denn die speziellen Bedeutungen sind wie gesagt für die Logik irrelevant.

• *funktionale Konstanten*
Konstanten sind in der Logik letztlich nur die eigentlichen *logischen Zeichen* wie →, ∧, ∨ usw. Nur sie haben eine *feststehende*, *unveränderliche* Bedeutung.
• *Unbekannte*
Außer Variablen und Konstanten werden *Unbekannte* verwendet. Nehmen wir z. B. den Schluss: „alle F sind G, a ist ein F, a ist also ein G". ‚a' sowie ‚F' und ‚G' werden zwar üblicherweise als *Konstanten* bezeichnet, sie sollen z. B. entsprechen: a = Sokrates, F = Mensch, G = sterblich. Der Schluss lautet dann: „alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist ein Mensch, also ist Sokrates sterblich".

Aber offensichtlich hat ‚a' nicht den gleichen Status wie ‚Sokrates', ‚a' steht zwar für ein *bestimmtes* Individuum bzw. individuelles Objekt, welches aber zunächst *nicht bekannt* ist. Den Satz ‚Sokrates ist ein Mensch' verstehen wir unmittelbar und können seine Wahrheit feststellen. Dagegen ‚Fa' sagt uns erst einmal gar nichts, zunächst müssen ‚a' und ‚F' Bedeutungen zugewiesen werden. ‚a' und ‚F' sind somit *keine echten Konstanten*, eher könnte man sie als *Variablen* einordnen, weil z. B. ‚a' einmal für Sokrates stehen mag, einmal für Platon oder auch für ein völlig anderes individuelles Objekt. Dennoch besteht ein Unterschied zwischen ‚a' als Zeichen für ein *bestimmtes* Individuum und ‚x' als Zeichen für ein *unbestimmtes*, beliebiges Individuum. ‚x' ist eine *echte Variable*, dagegen betrachtet man ‚a' (entsprechend ‚x_1', ‚x_2' usw.) am besten als *Unbekannte* (vgl. genauer in 0-2-4).

0-1-5-3 SYNTAX

Die Grammatik der *logischen Sprache* nennt man *logische Syntaktik*, sie gibt an, wie Zeichen miteinander verknüpft werden können. Die Anordnung oder Verknüpfung von Zeichen nennt man *Syntax*; allerdings wird der Begriff 'Syntax' ebenfalls für die *Lehre* von den Zeichen-Verknüpfungen verwendet. Man kann die logische Syntaktik partiell auch auf die *normale Sprache* anwenden. Der *Aufbau*, die Anordnung der Zeichen in der *Logik* ist z. T. unterschiedlich, aber auch ähnlich wie in der *normalen*, deutschen Sprache.

Die einfachste Satzstruktur im Deutschen – gemäß ihrer Grammatik – ist: *Subjekt – Prädikat*. Eine ähnliche Struktur findet sich in der logischen Syntaktik: *Argument – Prädikat*.

Zwar gibt es auch alternative Grammatiken der normalen Sprache, wie die *generative Transformationsgrammatik*, die z. B. einen Satz in *Nominalphrase* und *Verbalphrase* zerlegt, aber das kann hier ausgeklammert werden.

Ich möchte nachfolgend nur einen *einfachen* Satz analysieren, erst einen *normal-sprachlichen* Satz, dann einen *formal-sprachlichen*.

Zunächst führe ich aber eine wichtige Unterscheidung ein, die sich primär auf *Sätze* bezieht:

– *Oberflächen-Struktur*: die rein *syntaktische* Zeichenfolge, die den Satz ausmacht
– *Tiefen-Struktur*: die *logisch-semantische* Struktur, die aber natürlich auch durch eine Zeichenfolge dargestellt werden muss

Dass man die logisch-semantische Struktur als ‚Tiefen-Struktur' bezeichnet, sie also für *zugrundeliegend* hält, zeigt, dass man sie als primär einschätzt.

Die Unterscheidung Oberflächen-Struktur / Tiefen-Struktur stammt aus der *generativen Transformationsgrammatik* (GTG), ich bestimme die Tiefen-Struktur aber in modifizierter Weise als *logische* Struktur.

1) normal-sprachlicher Satz
Nehmen wir als Beispiel den Satz: ‚Sokrates ist ein Mensch' (*Oberflächen-Struktur*).

	Sokrates	ist ein Mensch
Grammatik:	Subjekt	Prädikat
Logische Syntax:	Argument	Prädikat

Wie man sieht, entspricht sich hier die Analyse von *deutscher Grammatik* und *logischer Syntaktik* weitgehend. In der logischen Syntaktik gilt ‚ist ein Mensch' als *1-stelliges* Prädikat, das 1 Argument verlangt, also z. B. ‚Sokrates'. Im Gegensatz zu mehr-stelligen Prädikaten, etwa *2-stelligen* Prädikaten wie ‚ist-Lehrer-von', das 2 Argumente verlangt, z. B. Sokrates und Platon, so dass sich der Satz ergibt: ‚Sokrates ist Lehrer von Platon'; es gibt auch 3- und noch höher-stellige Prädikate.

‚... ist ein Mensch' (mit Leerstelle) wird dabei als 1-stelliger *Prädikator* bezeichnet. Prädikatoren sind *Wortklassen*, keine Satz-Kategorien. M. E. ist die obige Bezeichnung daher wenig konstruktiv, es ist sinnvoller, im Beispiel nur ‚Mensch' als Prädikator zu bezeichnen.

Aber auch die Einstufung von ‚ist ein Mensch' als 1-stelliges Prädikat finde ich nicht überzeugend. Nach meiner Auffassung darf man die Zeichensequenz ‚ist ein Mensch' in dem Satz ‚Sokrates ist ein Mensch' nur in der *Oberflächen-Struktur* als 1-stelliges Prädikat angeben, nicht in der logischen *Tiefen-Struktur*.

Zur Bestimmung der *logischen* Tiefen-Struktur des Satzes bezieht man sich auf die *Prädikaten-Logik*. Man übersetzt den Satz – zunächst noch in *normaler* Sprache – in eine Form, die der prädikaten-logischen *Bedeutung* entspricht (vgl. unten). So ist der Satz tiefenstrukturell – *extensional* (mit Bezug auf *Klassen*) – folgendermaßen zu analysieren:

‚Sokrates ist (ein) Element von der Klasse der Menschen'.

Sokrates	ist Element von	Klasse der Menschen
Argument 1	Prädikat	Argument 2

Hier wird also tiefen-strukturell das *2-stellige* Prädikat ‚(X) ist-Element-von (Y)' verwendet, das der *Kopula* entspricht.

Intensional (mit Bezug auf *Eigenschaften*) ergäbe sich ein entsprechendes Resultat: ‚Sokrates kommt die Eigenschaft Mensch zu' wäre zu analysieren als:

Sokrates(Argument 1) – kommt zu (Prädikat) – die Eigenschaft Mensch (Argument 2).

Hier zeigt sich, dass auf einer tieferen, logisch-semantischen Ebene *jeder* Satz mindestens ein *2-stelliges* Prädikat besitzt, denn ein Satz ist ein *Relationsgebilde*, und eine Relation bedeutet immer die Verbindung von mindestens *zwei* Relata (Relationsgliedern) durch einen Relator.

Nach der logischen Syntaktik bezeichnen 2-stellige Prädikatoren *geordnete Paare* bzw. Klassen von geordneten Paaren. Somit wäre der Satz ‚Sokrates ist Element der Klasse der Menschen' etwa folgendermaßen zu formulieren: ‚Sokrates und die Klasse der Menschen bilden ein geordnetes Paar, das ein Element der Klasse der geordneten Paare ist, die durch den 2-stelligen Prädikator „... ist Element von ..." bezeichnet werden'.

Allgemein geht man von *n-Tupeln* aus. Ein *n-stelliges* Prädikat bezeichnet ein n-Tupel, ein 2-stelliges Prädikat z. B. ein 2-Tupel oder *geordnetes Paar*. Allerdings ist diese Formulierung ziemlich kompliziert und enthält ja wiederum den Ausdruck ‚ist-Element-von', was eine weitere und noch kompliziertere Umformulierung erfordern würde.

Man könnte einem normal-sprachlichen Satz auf einer noch tieferen, abstrakteren Ebene, zusätzlich auch eine *formal-logische Tiefen-Struktur* zusprechen.

Oberflächen-Struktur	Sokrates ist ein Mensch
↑	
Tiefen-Struktur	Sokrates ist Element (von) der Klasse der Menschen
↑	
formale Tiefen-Struktur	$x \in F$

Es ist allerdings zu hinterfragen, ob man einem *normal-sprachlichen* Satz eine *formal-logische* Tiefen-Struktur zuordnen soll, d. h. generell, ob einer *inhaltlichen* Struktur eine *for-*

formale Struktur als Tiefen-Struktur zuzuordnen ist. Die *formale Logik* wäre dann prinzipiell die fundamentale Tiefen-Struktur der *natürlichen Sprache*.

2) formal-sprachlicher Satz
Nach der Analyse eines *normal*-sprachlichen Satzes wenden wir uns jetzt einem *formal*-sprachlichen Satz zu. Dafür formalisieren wir einfach den Satz ‚Sokrates ist (ein) Mensch'. Dabei sind vor allem 2 Formalisierungen bzw. entsprechend 2 formale Sätze zu unterscheiden: *extensional* ‚$a \in F$' und *intensional* ‚Fa'. Ich konzentriere mich dabei auf ‚$a \in F$'.

Oberflächen-strukturell entspricht die Formalisierung ‚$a \in F$' fast exakt dem *normal*-sprachlichen Satz. Und so könnte man entsprechend analysieren: a ist (ein) F.

a	∈ F
Argument	Prädikat

Ich halte allerdings eine solche oberflächen-strukturelle Analyse für inadäquat, da die Logik das ‚∈' normalerweise nicht als Teil eines 1-stelligen Prädikats (‚$\in F$') versteht oder jedenfalls verstehen sollte, sondern ausschließlich als 2-stelliges Prädikat, im Sinne von: „ist-Element-von", wie gleich vorgeführt.

Bei der intensionalen Formalisierung ‚Fa' steht ‚a' steht z. B. für Sokrates, ‚F' steht für Mensch, das ‚ist ein' (‚kommt zu') wird allein durch die *Syntax (Stellung)* ausgedrückt

Tiefen-strukturell besteht das Problem, dass die Tiefen-Struktur von ‚$a \in F$' sich normalerweise nicht von der Oberflächen-Struktur unterscheidet, also auch ‚$a \in F$' lautet. Allerdings ist der Satz tiefen-strukturell *anders* zu verstehen und zu analysieren. Denn als (logische) *Bedeutung* von ‚$a \in F$' umschreibt man am besten: Individuum a ist Element der Klasse F. Die Tiefen-Struktur orientiert sich ja aber an der Bedeutungsstruktur, insofern ergibt sich folgende Zerlegung in Argument(e) und Prädikat:

a	∈	F
Argument_1	Prädikat	Argument_2

Wenn aber *Oberflächen-* und *Tiefen-Struktur* zusammenfallen, dann wird ihre Unterscheidung letztlich sinnlos. Und dann sollte man sich an die tiefen-strukturelle Analyse halten, die nämlich den Satz so zerlegt, wie es seiner logischen Bedeutung entspricht. Diese semantische Struktur ist letztlich die wesentliche, die syntaktische Struktur ist eben nur „oberflächlich".

Es wäre daher zu fragen, ob die Unterscheidung *Oberflächen-* versus *Tiefen-Struktur* generell in der formalen Logik unnötig ist. Aber zwischen *verschiedenen* Logik-Ebenen kann man durchaus mit dem Konzept der *Tiefen-Struktur(en)* arbeiten, in der Weise, dass *eine* logische Struktur die Tiefen-Struktur für eine *andere* darstellt, z. B. folgendermaßen:

Klassen-Logik	$F \subset G$
↑	
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
↑	
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

0-1-5-4 SEMANTIK

Zwischen *Syntax* und *Semantik*, zwischen *Form* und *Bedeutung* bestehen vielerlei Beziehungen. Um nur *einen* Aspekt herauszugreifen: Je nachdem, welche *Zeichenklassen* es in der

Syntax gibt, wird damit auch eine Aussage über die *Bedeutungen* und damit über die *Welt* getroffen.

Z. B. unterscheidet die normale Sprache syntaktisch (u. a.) zwischen den Wortarten *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben*. Mit diesen Wortarten werden aber verschiedene Bedeutungen verbunden, wie schon die Begriffe *Dingwörter*, *Eigenschaftswörter* und *Zeit- oder Bewegungswörter* besagen. Damit wird ausgedrückt, dass es diese Phänomene, Dinge, Eigenschaften, Bewegungen gibt und dass sie zu unterscheiden sind. Die übliche logische Sprache vereinigt diese drei Wortarten jedoch als *Prädikatoren*, unterscheidet sie somit nicht. Damit ist natürlich eine wichtige Aussage über die Welt gemacht, etwa, dass es keinen wesentlichen Unterschied zwischen „Dingen" und „Eigenschaften" gibt.

Man könnte vermuten, die *Semantik* sei in der Logik weniger ausgeprägt, denn die – formale – Logik *abstrahiert* ja gerade von der konkreten Bedeutung der deskriptiven Ausdrücke. Diese Vermutung wäre aber ein Irrtum, denn die Logik ist *primär semantisch*, nicht syntaktisch orientiert. Allerdings geht es der Logik nicht um die *konkrete* Bedeutung von Wörtern oder Sätzen, sondern um *abstrakte* Bedeutungen.

Einerseits verwendet die Logik eine extensionale Semantik nahe der *Mengen-Theorie*, indem sie von (formalen) Mengen, Klassen, Individuen bzw. Elementen, Relationen wie der Element-Relation usw. ausgeht. Die Bedeutung eines Satzes wird hier als mengen-relationale Relation zwischen Objekten dargestellt (auf die Semantik von Eigenschaften wird später eingegangen).

Am wichtigsten ist aber für die logische Bedeutung von *Sätzen* der Bezug auf *Wahrheit* bzw. *Wahrheitswerte*. Da die Logik eben *formal* ist, muss ich nicht die konkrete Bedeutung des Satzes kennen, um seine Wahrheit zu bestimmen. Denn wichtig ist für die Logik nicht, ob ein konkreter Satz *empirisch* wahr oder falsch ist, sondern unter welchen Bedingungen er wahr oder falsch ist. Anders gesagt, unter Bezug auf welche anderen Sätze er wahr oder falsch ist; dabei sind diese anderen Sätze primär die *Teil-Sätze des Gesamt-Satzes*.

Z. B. „wenn X, dann Y": $X \rightarrow Y$. Um zu wissen, ob dieser Satz wahr ist, muss ich nicht die Bedeutung von X und Y kennen. Ich muss nur wissen, ob die Einzelsätze ‚X' und ‚Y' wahr sind, und außerdem die Definition von $\rightarrow$ kennen. Es kann auch schon reichen, nur den Wahrheitswert *eines* Satzes zu kennen. Wenn ich z. B. weiß, dass ‚Y' wahr ist, weiß ich bereits, dass ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist. Aber auch wenn ich z. B. weiß, dass ‚X' falsch ist, weiß ich bereits, dass ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist. Die alles bewegt sich in einem *hypothetischen* Raum: w*enn* – dann.

Man spricht hier von einer w*ahrheitswert-funktionalen Semantik,* weil die Wahrheit eines *Gesamt*-Satzes ($X \rightarrow Y$) eine *Funktion* der Wahrheit(swerte) seiner *Teil*-Sätze (X, Y) ist.

Oben habe ich einen *synthetischen* Satz wie $X \rightarrow Y$ dargestellt. Bei einem *analytischen* Satz wie $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist die Wahrheit des Gesamt-Satzes sogar unabhängig von der Wahrheit der Teil-Sätze, $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist nämlich immer wahr, es ist eine Tautologie.

Diese Aussagen gelten für die *reine* Logik. Für die *angewandte* Logik sind die Verhältnisse etwas anders. Angenommen ich will folgenden Schluss ziehen: „Alle Philosophen sind weise, Sokrates ist Philosoph, also ist Sokrates weise". Der Gesamt-Satz ist ohne Zweifel wahr, denn er ist tautologisch. Um aber zu wissen, ob die Schlussfolgerung „Sokrates ist weise" empirisch wahr ist, muss ich auch wissen, ob die Vordersätze, die Prämissen wahr sind; es sei denn, ich untersuche *direkt*, ob Sokrates weise ist, was natürlich einfacher wäre.

Die wahrheitswert-funktionale Semantik beruht auf der Definition der logischen Zeichen bzw. Junktoren. Diese haben eine konkrete, konstante Bedeutung, die sich aber allein durch *Wahrheitswerte* angeben lässt, konkret durch die *Wahrheitstafeln*. Ich werde allerdings später zeigen, dass dieser Ansatz nicht ausreicht; denn zwei Sätze, welche *dieselbe Wahrheitstafel* besitzen, können sich in ihrer Bedeutung durchaus unterscheiden.

Allerdings vermittelt die Logik auch darüber hinaus gewisse semantische *Informationen*
Man vergleiche die beiden folgenden Sätze:

‚Sokrates ist ein Mensch' (Substantiv-Satz)
‚Sokrates ist weise' (Adjektiv-Satz)

In der normalen Sprache sind diesen beiden Sätze durchaus unterschieden. ‚Mensch' ist ein *Substantiv*, das Wort ‚weise' ist dagegen ein *Adjektiv*. Auch wenn das nicht ganz klar abgegrenzt werden kann, versteht man es in der Grammatik doch so, dass ein Substantiv eine komplexere, wichtigere Bestimmung bedeutet als ein Adjektiv. In der *traditionellen* Logik verstand man entsprechend z. B. „Mensch" als *Artbegriff*, der ein Individuum wesentlich und vollständig kennzeichnet; und ein Artbegriff konnte nur durch ein Substantiv repräsentiert werden. Eigenschaften konnten dagegen auch zufällig sein (*Akkzidentien*), ihnen entsprachen die weniger wichtigen Adjektive.

In der *formalen* Logik ist der Unterschied zwischen Substantiven, Adjektiven und Verben wie beschrieben dagegen aufgehoben; alle werden durch *Prädikatoren* ersetzt. So würden beide obigen Sätze z. B. durch ‚$a \in F$' dargestellt.

0-1-5-5 FORMALISIERUNG

Die *Übersetzung* eines Satzes der *normalen Sprache* in einen Satz der *formalen logischen Sprache* nennt man *Formalisierung*. Hier ist zu unterscheiden:

- der Satz ist in der Alltagssprache auch schon *abstrakt* formuliert
- der Satz ist *konkret* formuliert, mit Konstanten, das ist der häufigere Fall.

Durch die Formalisierung wird keine Bedeutungsgleichheit erreicht (wie wenn man einen Satz von einer normalen Sprache in eine andere übersetzt), sondern nur die *logische Struktur* des Satzes dargestellt. Man macht das, um eben diese Struktur und damit die Wahrheitsbedingungen herauszufinden.

Nehmen wir als Beispiel den folgenden Satz der normalen Sprache: ‚Sokrates ist Philosoph'. Natürlich ist dieser Satz nicht ohne Bedeutungsverlust in die logische Sprache übersetzbar, denn es gibt in der logischen Sprache keine Wörter wie ‚Sokrates' usw. Zwar wird oft so getan, als sei eine Übersetzung möglich, man wählt dann die Individuen-Konstante ‚a' und die Eigenschafts-Konstante (bzw. Prädikat-Konstante) ‚F' und schreibt z. B. ‚$a \in F$'.

Aber ‚$a \in F$' könnte natürlich auch für ‚Platon ist Grieche' stehen. Wenn man wirklich eine direkte Übersetzung vornehmen will, muss man sich eindeutige Termini erst definieren, z. B.: x_{so} =df Sokrates, F_{Ph} =df Philosoph. „x" und „F" sind hier Variablen, die aber durch die *Indizes* zu echten Konstanten werden, sie haben dann eine feste Bedeutung. Dann mag ‚$x_{so} \in F_{Ph}$' als direkte Übersetzung dienen. Doch es ist wie gesagt gar nicht der Sinn der Logik, direkte Übersetzungen vorzunehmen.

Eine andere Prozedur ist die *De-Formalisierung*, also die *Rückwandlung* einer *formalen* Aussage in eine *normal-sprachliche*, was allerdings selten zum Thema gemacht wird. Es gibt nämlich einen Unterschied im Schreiben und Lesen: Einen formalen Satz wie ‚$X \rightarrow Y$' sprechen wir auch formal: ‚X impliziert Y'.

Anders ein Satz wie: ‚$\Lambda x(x \in F \rightarrow x \notin G)$'. Den würde man normalerweise nicht lesen: ‚Allquantor, klein x, Klammer auf, Element-Zeichen, F, Implikator, durchgestrichenes Element-Zeichen, G, Klammer zu'. Sondern man liest ihn mehr oder weniger in der *normalen Sprache* (d. h. man *de-formalisiert* ihn). Z. B.: ‚Für alle x gilt: wenn x Element der Klasse F ist, dann ist x nicht Element der Klasse G'.

Anders gesagt: Die formale, logische Sprache ist primär eine *geschriebene* Sprache, nur sehr begrenzt auch eine *gesprochene* Sprache.

0 – 2 KOMPONENTEN DER LOGIK

0-2-1 Einteilung der Komponenten

0-2-1-1 STUFUNG IN DER LOGIK
Die *herkömmliche* Logik geht meist von einer *2-Stufung* der logischen *Komponenten* aus.
Je nachdem, auf welchen *Wirklichkeitsbereich* sie sich ausrichtet, ergibt dies folgende Stufen:

- *Psyche*
  1. Begriffe (unterteilt in Allgemein-Begriffe und Individual- Begriffe)
  2. Urteile bzw. Gedanken
- *Sprache*
  1. Wörter (unterteilt in Eigennamen und Prädikatoren)
  2. Sätze bzw. Aussagen
- *Realität*
  1. Dinge / Sachen (unterteilt in Individuen und Klassen)
  2. Ereignisse bzw. Sachverhalte

Das Augenmerk der Logik gilt dabei vor allem den jeweils unter 2. genannten Entitäten.
Als Hauptunterschied zwischen 1. und 2. gilt jeweils:
– Die *Entitäten unter 2.* (Urteile, Sätze, Sachverhalte) sind *wahr* oder *falsch* o. ä.
– Für die *Entitäten unter 1.* (Begriffe, Wörter, Dinge) gilt das nicht; man kann also z. B. von einem isolierten Wort nicht sagen, es ist wahr oder falsch.
Wie ich in 0-4-4-1 noch zeigen werde, kann man diesen Unterschied allerdings relativieren.

0-2-1-2 OBJEKTE UND RELATIONEN
Auch in der *Integralen Logik* wird eine grundsätzliche *2-Teilung* vorgenommen, in:

1. *Objekte* (logische Objekte)

• Individuen	
• Mengen	Verknüpfungen von Individuen
• Molekular-Mengen	Verknüpfungen von Mengen

2. *Relationen* (logische Relationen)

• Individuen-Relationen	Relationen zwischen Individuen und Mengen
• Mengen-Relationen	Relationen zwischen Mengen
• Molekular-Relationen	Relationen zwischen anderen Relationen

Anstelle von *Mengen* kann man auch von *Klassen* ausgehen.
Wie man sieht: Es besteht eine *Parallele* zwischen Objekten und Relationen:

• Individuen	Individuen-Relationen
• Mengen	Mengen-Relationen
• Molekular-Mengen	Molekular-Relationen

(Im dritten Punkt ist die Parallele nicht ganz gegeben, dazu komme ich noch.)

Von daher lassen sich *3 Bereiche* der Logik bzw. 3 Logiken unterscheiden:

- *Individuen-Logik* (meistens *Prädikaten-Logik* genannt)
- *Mengen-Logik* (meistens *Klassen-Logik* genannt)
- *Molekular-Logik* (meistens *Aussagen-Logik* genannt)

Die Integral-Logik greift zwar die obigen Unterscheidungen zur Differenzierung auf, primär bezieht sie sich aber auf *generelle Komponenten*, die eben alles sein können. Sie sind *nicht danach spezifiziert*, ob es sich um Individuen, Mengen, Relationen usw. handelt.

Allerdings ist hier auch eine *3er-Unterteilung* möglich:

1. Objekte	z . B. X, Y	konkret: X = Regen, Y = Nässe
2. Relationen	z. B. $\rightarrow$	konkret: wenn – dann
3. Relationsgefüge	z. B. $X \rightarrow Y$	konkret: wenn Regen, dann Nässe

Es wird hier also genauer unterschieden zwischen den *Relationen* und den *Relationsgefügen* (oder *Relationssystemen*); die Relationsgefüge entsprechen den *Sachverhalten*, *Aussagen* oder *Urteilen*; allerdings kann man zur Vereinfachung auch Relationsgefüge als ‚Relationen' bezeichnen, wenn keine Missverständnisse auftreten können.

Am häufigsten verwende ich im Folgenden aber den Terminus ‚*Struktur*' für ein Relationsgefüge (genauer gehe ich darauf ein in 0-2-5-1).

Die oben dargestellte Theorie, die sich auf *Objekte* und Relationen zwischen ihnen bezieht, kann man *extensional* nennen. Man kann, ja muss sie durch eine zweite *intensionale* Theorie ergänzen, die sich auf *Eigenschaften* (oder *Begriffe*) und Relationen zwischen ihnen bezieht. Auf den Unterschied von Extension und Intension wurde schon kurz eingegangen – und er wird uns noch ausführlich beschäftigen.

0-2-1-3 LOGISCHER AUFBAU DER WELT

Ich möchte hier schon einen kurzen Überblick über den *logischen Aufbau der Welt* geben. Im Einzelnen wird in vielen späteren Punkten darauf eingegangen.

Man kann aus logischer Sicht zunächst sagen: Die Welt ist die Gesamtheit (All-Klasse) aller Entitäten. Entitäten sind dabei *Objekte*, *Eigenschaften*, *Relationen* und Relationsgefüge = *Strukturen* (die Quantität wird hier nicht explizit genannt, geht aber implizit in diese Sammlung ein). Zur Übersichtlichkeit lasse ich die *Eigenschaften* erst einmal beiseite.

Welt (alle Entitäten)

Objekte Relationen Strukturen

Nun kann man allerdings analysieren: *Strukturen* bestehen aus Objekten und Relationen, insofern ist der Begriff der Struktur *abgeleitet*. Man kann einfacher also auch unterteilen:

Welt

Objekte Relationen

Andererseits kann man eine *umgekehrte* Darstellung wählen; demnach ist das Relationsgefüge, die Struktur (real also der Sachverhalt) der *Ausgangspunkt*. Die Welt ist demnach die Menge aller Strukturen oder aller Sachverhalte.

Welt

Struktur$_1$ Struktur$_2$ ... Struktur$_n$

Dieses Welt-Modell ist erst einmal offen auch für eine generelle, *über-logische* Betrachtung. Wie schon bemerkt und später noch genauer aufgezeigt werden soll, berücksichtigt die Logik aber nur *funktionale* Relationen; räumliche, zeitliche, kausale u. a. Relationen werden nicht miterfasst. Somit ist das logische Welt-Modell zwar einerseits allgemeingültig auf jeden Wirklichbereich anwendbar, aber es liefert andererseits keine vollständige Erfassung.

0-2-1-4 SCHREIBWEISE

Nachdem oben die möglichen *Ebenen* bestimmt worden, auf welche die Logik Bezug nehmen kann, soll nun die festgelegt werden, wie diese Ebenen in der *Schreibweise* behandelt werden.

Der normale Bezug der Sprache geht auf die *reale* Ebene. Dafür verwende ich keine besonderen Zeichen. Wenn ich etwas als *psychisch* kennzeichnen will, schreibe ich es in # ... #. Wenn ich etwas als *sprachlich* kennzeichnen will, schreibe ich es in ‚ ...’. Wenn ich etwas *anführen* möchte, abgrenzen möchte, als Beispiel o. ä., ohne mich auf eine Ebene festzulegen, schreibe ich „ ...“.

Ich setze den Punkt immer *hinter* das Anführungszeichen, denn es geht hier nur um *Beispielsätze* usw., aber nicht um wörtliche Rede; so wird eine größere Einheitlichkeit erreicht. Wenn ich etwas *hervorheben* möchte, z. B. als Fachbegriff oder als besonders wichtig, verwende ich meistens *Kursiv*-Schrift; in diesem Fall verzichte ich ggf. auf Anführungszeichen.

- Sachverhalt: Peter ist klug.
- Urteil: #Peter ist klug#.
- Satz: ‚Peter ist klug’.
- Unspezifiziert: „Peter ist klug“.

Formalisierungen, logische und mathematische *Formeln*, schreibe ich im Folgenden immer *ohne* Anführungen, auch wenn sie *meta-sprachlich* verwendet werden (bis auf wenige Ausnahmen, wenn der meta-sprachliche Status betont werden soll). Die sprachliche Exaktheit bewerte ich hier niedriger; als wichtiger erachte ich, dass die Formel übersichtlich ist.

0-2-1-5 OBJEKT- UND META-SPRACHE

Dieses Thema wurde schon mehrfach kurz angesprochen. Da es aber wichtig ist und zu Missverständnissen Anlass geben kann, führe ich es noch etwas weiter aus. Man unterscheidet zwischen:

- *Objekt-Sprache*: In dieser Sprache wird über *Objekte*, über die Welt gesprochen bzw. geschrieben. Z. B. sage ich aus: Aristoteles war ein genialer Philosoph.
- *Meta-Sprache*: In dieser Sprache wird über die (Objekt-)*Sprache* gesprochen/geschrieben.

Z. B. der *Satz* ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph’ besteht aus fünf Wörtern (syntaktische Aussage). Oder: ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph’ ist wahr (semantische Aussage).

Bei der Objekt-Sprache äußert man sich *in* der Sprache, verwendet sie, bei der Meta-Sprache führt man die Objekt-Sprache an.

Im Grunde ist die Eingrenzung auf Objekt- und Meta-*Sprache* aber zu eng. Ebenso könnte ich unterscheiden: *Objekt-Sachverhalt*: ein Sachverhalt besteht bzw. wird festgestellt, *Meta-Sachverhalt*, es wird eine Feststellung über einen Sachverhalt getroffen (entsprechend *objekt-psychisch* oder *meta-psychisch*). Natürlich erfolgt diese Feststellung in Sprache, womit man wieder auf die Unterscheidung Objekt- und Meta-Sprache verwiesen ist.

Die Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache ist auch in der Alltagssprache wichtig, weil es sonst zu Missverständnissen kommen kann. Z. B: ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph ist wahr.' Dies führt zu Verwirrung. Richtig wäre: Der Satz ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph' ist wahr.

In der Theorie von Mathematik und Logik kann die Nicht-Unterscheidung von Objekt- und Meta-Sprache zu *Antinomien* führen, in der praktischen Verwendung ist dies aber zu vernachlässigen. Aus dem Kontext ist im Grunde immer zu erkennen, ob eine Formel objektsprachlich oder meta-sprachlich gemeint ist. Und anders als in der normalen Sprache ergeben sich auch kaum Missverständnisse. Z. B.: $X \rightarrow Y$ ist eine logische Aussage. Oder ganz korrekt: ‚$X \rightarrow Y$' ist eine logische Aussage. Da der logische Ausdruck durch die Formalisierung ohnehin abgegrenzt ist, muss man ihn optisch nicht notwendig durch *Anführungszeichen* o. ä. zusätzlich abgrenzen. Andererseits müssten bei korrekter Verwendung der Meta-Sprache sehr häufig Anführungszeichen verwendet werden, was die ohnehin komplizierten Formeln noch unübersichtlicher machte. Da es mir aber wichtig ist, den Text so übersichtlich wie möglich darzustellen, verzichte ich in den Formalisierungen auf den Perfektionismus der strengen Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache.

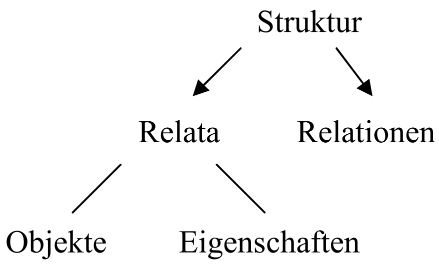
0-2-2 Objekte und Verknüpfungen

0-2-2-1 LOGISCHE OBJEKTE

‚Objekte' nehme ich als einen übergeordneten *extensionalen* Sprachbegriff oder Terminus. Er lässt sich wie gesagt differenzieren, in *Individuen*, *Mengen/Klassen* oder *Mengen-Verknüpfungen*. Ein Objekt ist eine Ganzheit, eine identifizierbare Entität, traditionell sprach man von ‚Substanz'. Am ehesten denkt man bei Objekten an *konkrete*, körperliche, materielle Objekte, aber es gibt auch *abstrakte* Objekte, die nicht oder nur partiell spezifiziert sind.

Man könnte auch (unräumliche, unzeitliche) *logische Objekte* angeben, aber wesentlich bei der Logik sind die *logischen Relationen*, und die können zwischen allen Objekten bestehen.

Die *Intensionen*, d. h. die *Eigenschaften* oder *Begriffe*, die mit den Individuen und Mengen verbunden sind, fasse ich mit den Objekten im Terminus '*Relata*' zusammen, denn beide haben kaum einen eigenständigen Status, sondern sind primär Bestandteile Strukturen.



Diese Bereiche werde ich jetzt näher beschreiben, ohne sprachphilosophische Details.

0-2-2-2 INDIVIDUEN

Dies ist die unterste Ebene, sie umfasst *individuelle Objekte*, z. B. den Philosophen Sokrates. In der logischen Sprache verwendet man für Individuen *Variablen* wie ‚x', ‚y' oder *Konstanten* wie ‚a' und ‚b'. Ich bevorzuge als Konstanten allerdings ‚x_1' und ‚x_2' usw.

Um auszudrücken „dasjenige Objekt, das die Eigenschaft F hat", verwendet man den *Kennzeichnungs-Operator*: $\iota x(Fx)$. Man spricht auch von *‚Jota-Operator'*, weil das griechische Zeichen ι (Jota) verwendet wird.

Man könnte diskutieren, ob es – real – *bestimmte* und *unbestimmte* Objekte gibt; oder ob es sinnvoller ist davon auszugehen, dass nur unsere *Sprachzeichen* semantisch bestimmt oder unbestimmt sind – die Objekte dagegen grundsätzlich bestimmt. Ich werde in 0-2-4 zeigen, dass die Antwort hierauf recht komplex ausfallen muss; vor allem im Bereich der *Quantenphysik* geht man allerdings davon aus, dass Objekte nicht *deterministisch* (vollständig bestimmt), sondern nur *statistisch* (partiell bestimmt) zu fassen sind. Eine weitere Diskussion wäre, inwieweit individuelle Objekte eine einheitliche *Identität* besitzen bzw. diese – über die Zeit – bewahren. Aber in der Logik kann man von diesen Fragen weitgehend abstrahieren.

Der Bezug auf Individuen – individuelle Objekte – ist ein *extensionaler* Zugang. *Intensional* bezieht man sich entsprechend auf *Individual-Eigenschaften* oder *Individual-Begriffe.* Z. B. könnte man von einer *Gesamt-Eigenschaft* „Sokrates" ausgehen – ich schreibe sie ‚E(Sokrates)', also ‚E' für ‚Eigenschaft'; bzw. geht man von einzelnen *individuellen Eigenschaften* aus, wie etwa der Körpergröße von Sokrates. Die Bestimmung einer solchen *Individual-Eigenschaft* bzw. eines solchen *Individual-Begriffs* ist allerdings nicht unproblematisch; dies wird vor später beim Punkt „Definitionen" erläutert.

0-2-2-3 MENGEN

Mengen sind gedachte *quantitative Zusammenfassungen* von Individuen, die als *Elemente* der Menge gelten. Eine Menge ist z. B. die Zusammenfassung von Sokrates, Platon, Aristoteles.

Man kann *Individuen* auch als Mengen mit nur *einem* Element ansehen. Die Menge „Sokrates" wäre z. B. die Menge, die als einziges Element eben Sokrates enthält.

Man benennt Mengen mit ‚M' und ‚N' und schreibt Mengen mit *geschweiften Klammern*.

M = {Sokrates, Platon, Aristoteles} bzw. N = {x, y, z}

Andererseits kann man Mengen auch als bestimmte *Verknüpfungen von Individuen*, nämlich *Vereinigungen* ansehen. Ich verwende dann nicht das unspezifische *Komma*, sondern das *Vereinigungs*-Zeichen ∪. M = {Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles}

Im Grunde kann man dann auch die geschweiften Klammern weglassen. Das diente einer Vereinheitlichung, wie sie in der Wissenschaft immer erwünscht ist. So ergibt sich z. B.:

M = Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles

Wie sich später noch zeigen wird, steht das ∪ in Verbindung zu dem Junktor „*oder*", formal ∨ . Das mag irritieren, denn bei einer Vereinigung von Elementen mag man sprachlich doch eher an „*und*" denken, formal ∧. Das „und" ist aber mit dem *Schnitt-Operator* ∩ verbunden, der für die *Schnitt-Menge* steht. Man kann sich nun leicht klarmachen, dass die Schnitt-Menge der Individuen (bzw. der Individual-Mengen) Sokrates, Platon und Aristoteles zu einer *leeren* Menge führen würde, nicht zur Vereinigung.

und	∧	Schnitt-Menge	∩
oder	∨	Vereinigungs-Menge	∪

0-2-2-4 KLASSEN

Klassen sind Mengen von *allen* Individuen, denen eine *bestimmte Eigenschaft* zukommt (bzw. ein bestimmter Begriff). Z. B. ist die Klasse der Menschen die Menge aller Objekte, denen die Eigenschaft zukommt, Mensch zu sein.

Diese Bestimmung zeigt die Bedeutung der *Intension*. Man muss zur Definition einer Klasse letztlich auf eine *Eigenschaft* zurückgreifen. Denn sonst geriete man in einen *Zirkel*: „Die Klasse aller Menschen ist die Menge aller Objekte, die Elemente der Klasse Mensch sind".

Zwar kann man Klassen partiell als *Schnitt-Mengen* oder *Vereinigungs-Mengen* anderer Klassen darstellen. So mag man bestimmen: „Die Klasse der Rappen ist die Schnitt-Menge der Klasse der Pferde und der Klasse der schwarzen Objekte“. Führt man diese Definitionen aber weiter, so wird man sich letztendlich doch auf *Eigenschaften* bzw. *Begriffe* beziehen müssen. Immer weiter auf andere Klassen zu verweisen, ist nicht wirklich überzeugend.

Klassen (*extensional*) entsprechen (*intensional*) *Klassen-Eigenschaften* oder *allgemeine Eigenschaften*, also z. B. die Eigenschaft „Mensch“ (oder „Menschlichkeit“). In der traditionellen Logik sprach man von „Allgemein-Begriffen“, ich verwende ‚Allgemein-Eigenschaft’ und ‚Allgemein-Begriff’ parallel. Wie sich Klassen und ihr Verhältnis zu Begriffen im Einzelnen bestimmen lässt, wird später noch diskutiert werden.

Klassen ordnen die Wirklichkeit nach *Gleichheit* bzw. *Ähnlichkeit*, indem sie *alle* Individuen mit ähnlichen Eigenschaften zusammenfassen (im Gegensatz zu einer *Menge*, die auch *ungleiche* Objekte willkürlich verbinden kann).

Klassen lassen sich in *Teilklassen* (Teilmengen) zerlegen, bei einer vollständigen Zerlegung bilden die Klassen die Vereinigungs-Menge ihrer Teilklassen. Dabei gilt: Die Elemente einer Teilklasse sind sich ähnlicher als die Elemente der Klasse (Oberklasse). Sei die Oberklasse die Klasse aller Pferde und die Teilklasse umfasse alle Rappen, dann sind die Rappen sich prinzipiell ähnlicher als die Pferde, und zwar in diesem Fall um genau *eine* Eigenschaft, nämlich die schwarze Hautfarbe.

Klassen bezeichnet man mit den Buchstaben ‘F’ und ‘G’ bzw. ‘F_1’, ‘F_2’ usw.
Um sie genau von Begriffen abzugrenzen, kann man ggf. schreiben: ‘K(F)’, ‘K(G)’ usw.
Klassen lassen sich vor allem auf zwei Arten *formalisieren*: *Aufzählung* und *Beschreibung*.

• *Aufzählung*

$$F = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$$

Ich verwende also die oben eingeführte Formalisierung.
Die herkömmlich Formalisierung wäre: $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
Beide Formalisierungen gelten nur bei *endlichen* Klassen. Bei *unendlichen* Klassen gilt:

$$F = x_1 \cup x_2 \cup \ldots$$

• *Beschreibung*

Die herkömmliche Schreibweise ist: $F = \{x / Fx\}$
Lies: „Die Klasse F ist die Menge aller x, für die gilt: x hat die Eigenschaft F“.

Normalerweise habe ich für *Eigenschaft* immer das ‚E’ geschrieben, die Eigenschaft der Klasse F schreibt man also ‚E(F)’ (sprich ‚E von F’). Daher müsste die Formalisierung eigentlich lauten: $F = \{x / E(F)x\}$. Durch die Syntax ist aber bei $F = \{x / Fx\}$ klar, dass die *Eigenschaft* F gemeint ist, ohne dass man ‚E’ nennt. Denn wäre die *Klasse* F gemeint, würde man schreiben $F = \{x / x \in F\}$, was wiederum ein Zirkel wäre.

Alternativ zur Mengen-Darstellung kann man den *Klassen-Operator* nutzen. Um auszudrücken „die Klasse aller x, für die gilt, x hat die Eigenschaft F“, verwendet man den *Klassen-Operator* oder *Lambda-Operator*, benannt nach dem griechischen Zeichen *Lambda* λ: $\lambda x(Fx)$.

0-2-2-5 VERKNÜPFUNGEN

Logische *Verknüpfungen* müssen genauer beschrieben werden. Verknüpfungen in der Logik sind keine räumlichen oder zeitlichen Synthesen, sondern man muss sie rein *quantitativ* verstehen. Am besten bieten sich hier *mengentheoretische* Begriffe an. Allerdings werden zur Definition auch logische Junktoren, die sich auf *Relationen* beziehen, verwendet.

Im weiteren Sinn kann man Verknüpfungen noch zu den *Objekten* rechnen. Ich spreche hier von *Mengen*-Verknüpfungen, man kann aber genauso von *Klassen*-Verknüpfungen ausgehen.

Herkömmlicherweise werden *Verknüpfungen* nur auf Mengen bezogen. Dabei ergibt sich aus der Verknüpfung von zwei (oder mehr) Mengen eine neue Menge. Wie beschrieben, kann man aber auch *Individuen* zu einer Menge verknüpfen. Eine *komplexe* Menge, die sich aus der Verknüpfung von anderen Mengen ergibt, nenne ich *Molekular-Menge* (*Molekül-Menge*).

Verknüpfungen von Mengen sind genau zu unterscheiden von *Relationen* zwischen Mengen: „M ist *Teilmenge* von N" ist z. B. eine Relation, sprachlich eine *Aussage*, die *wahr* oder *falsch* sein kann. Dagegen sind Verknüpfungen von Mengen ebenfalls Mengen und damit nicht wahr oder falsch.

Man kann Verknüpfungen in zweierlei Weise auffassen:
1) *statisch*, als *Zustände*:
die Menge M *ist* mit der Menge N verknüpft
2) *dynamisch* bzw. handlungstheoretisch, als *Operationen*:
die Menge M *wird* mit der Menge N verknüpft

Anhand der Vereinigung von Mengen (vgl. unten) sei das genauer erklärt:

$$M_1 \cup M_2 = N$$

$M_1 \cup M_2$	Verknüpfung, hier Vereinigung bzw. Vereinigungs-Menge
$\cup$	Verknüpfungs-Operation bzw. Operator
N	Resultierende Menge: Molekular-Menge
M_1, M_2	Ausgangs-Mengen

Bei 2 Mengen M und N sind $4^2 = 16$ *Verknüpfungen* möglich.

Ich gebe aber nur die wichtigsten Verknüpfungen zwischen 2 Mengen M und N an:

- Vereinigungs-Menge $M \cup N$
- Schnitt-Menge $M \cap N$
- Differenz-Menge $M \setminus N$
- Ergänzungs-Menge M'

• *Vereinigungs-Menge* $M \cup N$ (Vereinigungs-Verknüpfung)

Die wird herkömmlich definiert als eine Verknüpfung von 2 Mengen M und N, wobei alle Elemente erfasst werden, die in M *oder* N enthalten sind (inklusives oder):

$$M \cup N = \{x \,/\, x \in M \;\vee\; x \in N\}$$

Ich möchte die Vereinigungs-Menge aber wie gesagt allgemeiner verstehen. Auch Individuen x, y, z lassen sich vereinigen, und zwar enthält man so die Menge (bzw. Vereinigungsmenge) dieser Individuen.

$$x \cup y \cup z = \{x, y, z\}$$

• *Schnitt-Menge* $M \cap N$ (Schnitt-Verknüpfung)

Sie spielt neben der Vereinigungs-Menge die wichtigste Rolle. Es ist die Menge aller x, die in M *und* N enthalten sind.

$$M \cap N = \{x \,/\, x \in M \;\wedge\; x \in N\}$$

• *Differenz-Menge* $M \setminus N$ (Rest-Menge)

Es ist die Menge aller x, die zu M, aber nicht zu N gehören

$$M \setminus N = \{x \,/\, x \in M \;\wedge\; x \notin N\}$$

• *Ergänzungs-Menge* M' (Komplement-Menge)

Zur Ergänzungs-Menge M' gehören alle Elemente, die zu N, aber nicht zu M gehören. Somit ist die Ergänzungs-Menge das Gegenstück zur Differenz-Menge.

$M' = N \setminus M = \{x \,/\, x \in N \;\wedge\; x \notin M\}$

Oft wird als zusätzliche Bedingung angegeben: $M \subseteq N$

Mengen-Verknüpfungen können prinzipiell unabhängig davon vollzogen werden, in welcher *Relation* die Mengen zueinander stehen; Mengen-Relationen sind z. B. *Teilmengen*-Relation oder *Identität* (dies wird noch ausführlich erläutert). Nur ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse der Mengen-Verknüpfungen in Abhängigkeit von der *Relation*. Wenn M und N identisch sind, dann ist z. B. die Schnitt-Menge $M \cap N$ identisch mit M bzw. N. Wenn dagegen M und N sich gegenseitig ausschließen, dann ist ihre Schnitt-Menge *leer*.

0-2-3 Objekte und Eigenschaften

0-2-3-1 ENTSPRECHUNG VON OBJEKTEN UND EIGENSCHAFTEN

Ich habe oben über Objekte und Eigenschaften geschrieben, dabei wurde deutlich: *Objekten* entsprechen immer *Eigenschaften* (bzw. Begriffe).

Individuen entsprechen *Individual-Eigenschaften.*

Klassen entsprechen *Klassen-Eigenschaften* oder Allgemein-Eigenschaften.

Ein Objekt ist immer eine *Ganzheit*, das gilt für Individuen wie für Klassen. Eine Eigenschaft, selbst eine komplexe Eigenschaft, kann man dagegen normalerweise als etwas *Isoliertes* sehen, das zwar begrifflich oder logisch eigenständig zu fassen ist, real aber nicht alleine auftritt. Im Folgenden sollen Objekte und Eigenschaften bzw. deren Verhältnis genauer untersucht werden.

0-2-3-2 FORMALES VERSUS INHALTLICHES OBJEKT

• Inhaltliches Objekt

In der *normalen Sprache*, aber auch in unserem normalen Weltverständnis ist ein Objekt durch *inhärente* Eigenschaften *bestimmt*. Z. B. ist das Individuum Sokrates oder die Klasse der Menschen mit Eigenschaften ausgestattet, die von dem Objekt nicht zu trennen sind.

So gehört die Eigenschaft „Mensch“ unmittelbar zu Sokrates hinzu. Und die Klasse Mensch umfasst ihrerseits *inhaltlich bestimmte* Individuen, also etwa: Sokrates, Platon, Aristoteles …

Zwar kann man ggf. einen *Träger* der Eigenschaften unterscheiden, aber der ist dann auch inhaltlich bestimmt. Z. B.: Der Mensch ist ein „Tier“ (Träger), das vernunftbegabt (Eigenschaft) ist. Das Objekt bildet ein *Ganzes* (traditionell eine Substanz), in ihm sind Träger und Eigenschaften untrennbar verbunden.

• Formales Objekt

In der *formalen Logik* ist ein Objekt dagegen inhaltlich völlig *unbestimmt*, entsprechend der Objekt-*Variablen* ‚x' in der Logik (wie ich noch zeigen werde, gilt das im Grunde auch für Konstanten). Sowohl *allgemeine Objekte* (Klassen) wie *individuelle Objekte* sind formal.

Z. B. wäre die (formale) Klasse F durch folgende formale Individuen zu bestimmen:

$K(F) = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$

Es wäre allerdings sinnlos, in dieser Weise eine *inhaltlich* bestimme Klasse zu definieren:

$\text{Klasse(Mensch)} = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$

Das wäre unspezifisch, denn $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ könnte genauso gut für die Klasse aller Affen stehen wie für alle Menschen.

• Kombination von formalen Objekten und Eigenschaften
Nun können formale (variable) Objekte aber *Träger von Eigenschaften* sein, zunächst von *formalen* Eigenschaften, z. B.: $K(F) = x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$
(lies: ‚x_1, für das gilt, es hat die Eigenschaft F' usw.)

Aber auch so kann man eine *inhaltlich* bestimmte Klasse nicht definieren, nur wenn man inhaltliche (konstante) Eigenschaften angibt: Klasse(Mensch) =
– *kollektiv*: Λx[Mensch x], {x / Mensch x}, λx(Mensch x)
– *individuell*: x_1[Mensch x_1] $\cup$ x_2[Mensch x_2] $\cup ... \cup$ x_n[Mensch x_n]
Und das ist der Weg der *Anwendung* der formalen Logik: Die Objekte sind *formal*.
Es können ihnen aber *inhaltliche* Eigenschaften zugeordnet werden.

Allerdings macht die Logik das nicht ganz konsequent, denn dann müsste sie auch Individuen so bestimmen, z. B. Sokrates = x_i[Sokrates x_i]; stattdessen verwendet man Konstanten.

Ist es nun sinnvoller, Objekte primär als formal oder als inhaltlich zu bestimmen? Die *erste Definition* (formales Objekt) hat zwar den Vorteil, dass sie Eigenschaften und Objekt sauber trennt; aber sie ist ganz unspezifisch. Die *zweite Definition* (inhaltliches Objekt) erlaubt dagegen echte Begriffs- und Bedeutungsbestimmungen.

Aber wir müssen uns hier gar nicht festlegen, sondern können gleichberechtigt neben den *inhaltlichen* Objekten auch *formale* Objekte angeben, die eben Bestandteil der inhaltlichen Objekte sind, z. B.:

Mensch (inhaltliches Objekt) = x (formales Objekt) + „Menschlichkeit" (Eigenschaft)

0-2-3-3 WESENTLICHE UND KONTINGENTE EIGENSCHAFTEN

Ich habe oben gezeigt, dass es sinnvoll ist, von *inhaltlichen Objekten* auszugehen, die bereits *Eigenschaften* enthalten. Damit wird die Abgrenzung bzw. Unterscheidung von *Objekten versus Eigenschaften* natürlich relativiert. Dies ist aus Gründen der Systematik nicht gerade wünschenswert, aber hat sich doch als beste Lösung erwiesen.

Weiter habe ich oben nur allgemein von *Eigenschaften* bzw. Begriffen gesprochen. Aber wir müssen genauer unterscheiden:

- wesentliche (*definierende, essentielle*) Eigenschaften
- unwesentliche (*kontingente, akzidentelle*) Eigenschaften

• *wesentliche Eigenschaften*
Dies sind *notwendige*, *identitätsbestimmende* Eigenschaften. Man kann auch von *Identitäts-* oder *Kern-Eigenschaften* sprechen, wenn man den etwas belasteten Begriff ‚wesentlich' umgehen will. Dabei können wir *2 Stufen* unterscheiden, wie später genauer erläutert wird.

Betrachten wir zunächst *Klassen* von Individuen: Z. B. ist natürlich für die Mitglieder der Klasse Mensch *primär* (1. Stufe) wesentlich, dass sie die Eigenschaft „Mensch" besitzen – oder als Adjektiv geschrieben ‚Menschlichkeit'.

Wir fragen dann aber, auf einer 2. *Stufe* (vgl. unten), welche Eigenschaften den Menschen *wesentlich* bestimmen. Hier wäre etwa die Eigenschaft „sprachbegabt" zu nennen. Eine *wesentliche* Eigenschaft muss normalerweise *allen* Menschen zukommen, aber dies ist nur eine *notwendige* Bedingung, keine *hinreichende*.

Für ein *Individuum* gilt Entsprechendes: Z. B. kommt dem Individuum Sokrates primär (1. Stufe) der Individual-Begriff „Sokrates" *wesentlich* zu. In der 2. Stufe gilt für Individuen normalerweise, dass ihnen eine *wesentliche* Eigenschaft *immer* und *überall* zukommen muss.

Die philosophische Klassik sah großenteils das Wesentliche des Individuums im *Allgemeinen*. So wäre es z. B. für Sokrates wesentlich, dass er Mensch ist (Artbegriff), aber nicht seine individuellen Eigenschaften, etwa seine spezifischen philosophischen Gedanken. Aus heutiger Sicht ist zwar für das Individuum auch das Allgemeine wesentlich, aber ebenso das *Besondere*, z. B. für Sokrates das, was ihn von anderen Menschen unterscheidet.

Solche essentiellen Eigenschaften kann man auch *analytisch*, genauer *material-analytisch* oder *definitions-analytisch* nennen. Denn sie sind Bestandteil von *Definitionen* oder folgen aus Definitionen.

Es ist schwierig, *generell* zu bestimmen, was eine Eigenschaft zu einer *wesentlichen* macht. Und es kann im konkreten Einzelfall noch schwieriger sein zu sagen, ob die Eigenschaft z. B. eines bestimmten Menschen für ihn wesentlich ist oder nicht. Dennoch ist die Unterscheidung wesentlicher und kontingenter Eigenschaften keinesfalls in den Bereich der *Metaphysik* oder Mystik abzuschieben, sondern eine letztlich wissenschaftlich zu klärende Frage.

• *kontingente Eigenschaften*

Das sind *zufällige*, z. B. *partikuläre* Eigenschaften, welche die Identität nicht berühren.

Bei *Klassen* geht es hier um Eigenschaften, die nur einem *Teil* der Klassenmitglieder zukommen, im Beispiel solche, die nur *einigen* Menschen zukommen, wie die Eigenschaft „schwarzhaarig". Aber es gibt auch *allgemeine* Eigenschaften, die kontingent sind, beim Menschen z. B. die Eigenschaft „Erdbewohner"; offenbar sind (bisher) *alle* Menschen Bewohner der Erde, aber dennoch ist „Erdbewohner" keine notwendige Eigenschaft eines Menschen – warum soll ausgeschlossen werden, dass ein Mensch etwa „Mondbewohner" ist?

Beim *Individuum* kann eine kontingente, partikuläre Eigenschaft eine solche sein, die es nur *manchmal*, nur zu bestimmten Zeiten besitzt. Z. B. „Sokrates ist müde": Müdigkeit ist sicher eine Eigenschaft, die Sokrates nicht ständig zukam.

Kontingente Eigenschaften kann man auch *synthetisch* nennen, denn sie folgen nicht aus Definitionen, sind nicht durch Begriffs-*Analyse* zu ermitteln, sondern geben eine neue, zusätzliche Information über das Objekt.

0-2-3-4 KONKRETE UND ABSTRAKTE OBJEKTE

Wir haben oben zwischen *formalen* und *inhaltlichen* Objekten unterschieden. Nach der Analyse von Eigenschaften können wir bei den inhaltlichen Objekten jetzt zusätzlich unterscheiden zwischen: *konkreten* Objekten und *abstrakten* Objekten

• konkrete Objekte

Ein *konkretes* Objekt ist das Objekt mit *allen* seinen (wesentlichen und kontingenten) Eigenschaften. Wenn man Z. B. den *konkreten* Sokrates erfassen will, dann muss man *alle* seine Eigenschaften erfassen, und zwar *quantitativ* präzise, also z. B. seine genaue Körpergröße, die genaue Farbe seiner Haare usw., auch wenn das für seine Identität nicht ausschlaggebend ist.

Und die *konkrete Klasse* der Menschen umfasst *alle* Menschen mit *allen* ihren individuellen Eigenschaften.

• abstrakte Objekte

Ein *abstraktes* Objekt ist das Objekt nur mit seinen *definierenden*, *wesentlichen* Eigenschaften. Ein *vollkommen abstraktes* Objekt ist ein *formales* Objekt, bei dem nämlich von *allen* Eigenschaften *abstrahiert* ist. *Ontologisch* ergeben sich hier durchaus Unterschiede; z. B. könnte man bestreiten, dass es *abstrakte* Objekte real gibt; man könnte allerdings auch bestreiten, dass es *konkrete* Objekte real gibt. Im Speziellen könnte man einwenden, das *Klassen* grundsätzlich abstrakt sind, weil sie nämlich von den Beziehungen zwischen den Klassenmitgliedern abstrahieren (etwa im Gegensatz zum System oder der Ganzheit).

0-2-3-5 SIND OBJEKTE ODER BEGRIFFE PRIMÄR?

Diese Frage lässt sich keineswegs leicht beantworten, sie hängt auch zusammen mit dem berühmten *Universalienproblem*. Ich werde die zwei relevanten Positionen kurz vorstellen.

• Objekte sind primär

Man könnte hier erstens anführen, Eigenschaften / Begriffe lassen sich auf *Klassenzugehörigkeit*en reduzieren. So mag man z. B. umformulieren: ‚Die Eigenschaft „Mensch“ zu besitzen, heißt, Element der Klasse der Menschen zu sein’. Hier wird festgelegt: Eigenschaft = *Klassenzugehörigkeit*. Und so kann man die Zusprechung von Klassenzugehörigkeiten immer weiter fortsetzen, aber letztlich bleibt dies ohne Erklärungswert, wenn man sich nicht irgendwann auf Eigenschaften bezieht. Erst recht bei *individuellen* Eigenschaften ist es problematisch, wenn man z. B. die (komplexe) Individual-Eigenschaft „Sokrates“ erklärt als Zugehörigkeit zur Klasse Sokrates; denn es gibt eben gerade nur *ein* Individuum Sokrates.

Zweitens könnte man argumentieren, dass es *isolierte* Eigenschaften gar nicht gibt, dass Eigenschaften immer nur in Verbindung mit einem Objekt auftreten und somit die Objekte wichtiger sind. Aber diese Argumentation würde von einer anderen Ebene aus geführt, z. B. einer physikalischen Theorie der Welt. *Physikalisch* betrachtet könnte man bestreiten, dass sich Objekt und Eigenschaft trennen lassen, *logisch* ist das aber möglich und legitim.

• Eigenschaften sind primär

Hier wäre erstens auf eine Theorie zu verweisen, nach der ein Objekt nur eine Kombination von Eigenschaften ist. Konkret kann das vor allem bedeuten: Ein Objekt ist eine

– *Vereinigungs-Menge* von Eigenschaften: $E(F) \cup E(G)$, kurz $E(F \cup G)$
  bzw. $E(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n)$. ‚E’ steht wie schon eingeführt für ‚Eigenschaft’.

– *Schnitt-Menge* von Eigenschaften: $E(F \cap G)$ bzw. $E(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)$

Hier ist das Objekt auf seine Eigenschaften reduzierbar, somit ist ‚Objekt’ kein eigenständiger Begriff. Man muss keinen gesonderten *Träger* der Eigenschaft, keinen *Besitzer* der Eigenschaft annehmen. Diese Theorie hat zunächst den Vorteil der Einfachheit und Eleganz, aber bei komplizierten Fällen ergeben sich schnell Schwierigkeiten, und es ist *ontologisch* auch problematisch, vollständig auf Objekte oder Träger zu verzichten.

Überzeugender für eine Dominanz von Eigenschaften spricht aber: Wenn man Objekte nicht rein formal fassen will, benötigt man Eigenschaften, um sie zu bestimmen. Denn wie oben dargelegt, ist die Rückführung auf *Klassenzugehörigkeiten* nicht endlos durchführbar.
Außerdem enthalten, wie erläutert, inhaltlich bestimmte Objekte bereits Eigenschaften in sich.

Abschließend eine Übersicht:

konkretes Objekt

abstraktes Objekt + kontingente Eigenschaften

formales Objekt + wesentliche Eigenschaften

0-2-4 Konstanten und Variablen

0-2-4-1 EINFÜHRUNG

Der Punkt Konstanten versus Variablen betrifft primär die *Sprache* bzw. die *Meta-Sprache*. Nachdem wir uns zuletzt vor allem mit der *realen* Ebene der *Objekte* bzw. der *Objekt-Sprache* beschäftigt haben, geht es jetzt also wieder primär um die Zeichen selbst.

Zwar kann man zunächst auch definieren: *Konstanten* stehen für *bestimmte* Objekte, *Variablen* stehen für *unbestimmte* Objekte. Doch wäre in Frage zu stellen, ob es real überhaupt unbestimmte Entitäten gibt. Um sich aber eine anspruchsvolle ontologische Diskussion über die Bestimmtheit und Bestimmtheit der Welt zu ersparen (die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde), formuliert man lieber:

Konstanten stehen für *bestimmte*, *gleichbleibende Interpretationen*,
Variablen stehen für *unbestimmte*, *wechselnde Interpretationen*.

Was *Variablen* und *Konstanten* betrifft, so herrscht in der Logik leider einige Unklarheit, ja ein Durcheinander. Ausführlich gehe ich darauf in meinem Buch „Integrale Logik“ ein.

Es wurde schon festgestellt, dass es bei den *logischen Zeichen* wie → ↔ ← ∧ ∨ nur Konstanten gibt. Das Problem Konstanten versus Variablen betrifft vor allem die Zeichen, die sich auf Individuen, Klassen und Sachverhalte (bzw. deren Intensionen) beziehen, man nennt sie *deskriptive Zeichen*.

Man könnte durchaus die These vertreten, dass die Logik *gar keine deskriptiven Konstanten* benötigt, weil sie eben grundsätzlich von Bedeutung abstrahiert, weil jedes Zeichen sich prinzipiell auf wechselnde bzw. verschiedene Entitäten anwenden lässt. Da die Unterscheidung zwischen Konstanten und Variablen aber etabliert ist, will ich sie auch berücksichtigen.

0-2-4-2 INDIVIDUEN-KONSTANTEN

Individuen-Konstanten sind Zeichen, die ein *bestimmtes* individuelles Objekt bezeichnen bzw. benennen; anders gesagt, Individuen-Konstanten bezeichnen *stets dasselbe* Individuum.

1) *Formale, logische Sprache*

Wenden wir uns zunächst der formalen Sprache der Logik zu: Normalerweise werden in der *Logik* ‚a', ‚b' usw. bzw. ‚a_1' und ‚a_2' usw. als *Individuen-Konstanten* verwendet. Ich habe aber schon darauf hingewiesen, dass ‚a' natürlich keineswegs so eine Individuen-Konstante ist wie ein *Eigennamen* in der normalen Sprache. Nehmen wir als Beispielsatz: ‚a ist Philosoph'. Um zu wissen, ob der Satz wahr ist, muss ich ‚a' *interpretieren*, muss ‚a' eine konkrete Bedeutung zuweisen. Dies ist aber eben genau die Definition einer *Variable*, dass diese erst durch eine Interpretation genau bestimmt wird (vgl. später). Man könnte ‚a' also allenfalls als *Unbekannte* auffassen, es steht zwar für ein bestimmtes Individuum, aber man weiß nicht, für welches. Ob sich allerdings wirklich ein Unterschied zwischen *Variablen* und *Unbekannten* aufrechterhalten lässt, würde eine weitere komplizierte Analyse erfordern.

Ich benötige in meinem Buch die Buchstaben ‚a', ‚b' usw. für Zahlengrößen. Um Missverständnisse zu vermeiden, verwende ich stattdessen das Zeichen ‚x' (bzw. ‚y') das eigentlich als Individuen-*Variable* gilt. Durch einen *Index* wird es aber zur *Konstante* transformiert. D. h. als *Individuen-Konstante* wähle ich ‚x_1' usw., ‚x_i' oder ‚x_n', je nach genauer Intension. ‚x_1' steht für ein genau bestimmtes x, ‚x_i' bezeichnet ein x aus einer finiten Menge oder Folge, ‚x_n' kann für jedes beliebige x stehen und kann nur indirekt noch als Konstante gelten.

2) *Normale Sprache*

Betrachten wir nun zum Vergleich die Individuen-Konstanten in der *normalen Sprache*. Hier scheint zunächst klar: Eine Individuen-Konstante ist ein *Eigenname*. Nehmen wir einen *Vornamen* wie ‚Hans'. Er ist sicher angelegt als Konstante, faktisch heißen aber Tausende Menschen ‚Hans' – so gesehen müsste man ‚Hans' als Individuen-*Variable* führen.

Dagegen kann man einen *vollständigen Namen*, mit Vor- und Nachnamen, wie ‚Karl Popper' als eine echte Konstante, mir klarer Extension ansehen; natürlich können ggf. auch mehrere Personen den gleichen Namen, z. B. ‚Karl Popper' haben, dem könnte man durch Nennung des vollständigen Namens ‚Sir Karl Raimund Popper' wahrscheinlich entgehen, jedenfalls fungiert der vollständige Name nicht als Variable, selbst wenn mehrere so heißen.

Allerdings gibt es folgende Problematik der Bedeutung von *Eigennamen*: sie sind in der normalen Sprache (normalerweise) nicht *sprachlich* definiert. Man findet in einem reinen *Wörterbuch* nicht die Bedeutung von ‚Karl Popper', sondern nur im *Lexikon*, im Sinne einer „Sacherklärung". Dies liegt daran, dass eine solche Namengebung im Wesentlichen ein *persönlicher*, *individueller* Akt ist (die Eltern geben ihrem Kind einen Namen) und keine Bedeutungszuweisung in Regie der *Sprachgemeinschaft*. So ist z. B. die Bedeutung des Namens ‚Hans Georg Friedrich Michels' bei seiner Familie und seinen Freunden bekannt, nicht aber allgemein. Dennoch sind in einer Gesellschaft bestimmte Eigennamen von *Prominenten* in ihrer Extension bekannt. Eigennamen, deren Extension allgemein bekannt sind, sind außerdem z. B. Namen von Ländern, Gebirgen oder Flüssen wie ‚Rhein', ‚Mosel', ‚Lahn'.

Bei Namen von *unbekannten* Menschen, z. B. ‚Hans Günther Friedrich Michels', weiß also der normale Sprecher der deutschen Sprache nicht, wer damit gemeint ist. Auch hier benötigt man zu dem Namen eine Erklärung, Beschreibung o. ä., was bzw. wer die *Extension* dieses Namens ist; und grundsätzlich muss bei allen Sprachzeichen *zunächst* die Bedeutung, die Intension festgelegt werden.

0-2-4-3 INDIVIDUEN-VARIABLEN

1) *Formale, logische Sprache*

Beginnen wir wieder mit der Logik-Sprache: Als *Individuen-Variable* gelten ‚x', ‚y' usw. (jeweils ohne Index). Eine Struktur wie ‚Fx' wird in der Logik normalerweise als *offener Satz* oder *Satzform* (bzw. Satzfunktion, Aussageform) interpretiert, die *weder wahr noch falsch* ist. Eine solche Satzform kann durch 2 Arten in einen echten Satz überführt werden:

erstens, man *bindet* die Variable ‚x' durch Quantoren, z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

zweitens, man *ersetzt* die Variable durch eine Konstante, z. B. ‚x' durch ‚x_1': Fx_1

Aber wie definiert man ‚x'? Man kann *syntaktisch* festlegen, dass für ‚x' eine *Individuen-Konstante* eingesetzt wird, z. B. ‚x_1' oder ‚x_2', wodurch dann z. B. aus der *Satzform* ‚Fx' der *Satz* ‚Fx_1' entsteht. Aber dass ‚x' quasi nur als Leerstelle fungiert, ist keine echte, semantisch ausreichende Erklärung. Es muss ein *Definitionsbereich* (oder Individuenbereich) für ‚x' angegeben werden, aus dem dann Konstanten auszuwählen sind. Anders gesagt, ‚x' ist als *Zusammenfassung* von Konstanten zu bestimmen.

Dabei muss vor allem unterschieden werden, ob diese Zusammenfassung *konjunktiv* oder *disjunktiv* zu verstehen ist.

• *konjunktiv*: z. B. $x = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ / $Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$, *allgemein*: $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$
$Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$ ist aber nur wahr, wenn alle Glieder wahr sind. Das ist für eine Variable ungeeignet, die ja wechselnd auf verschiedene Individuen angewendet wird.

• *disjunktiv*: z. B. $x = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ / $Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$, *allgemein:* $x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$
Hier ergibt sich aber folgendes Problem: Wie sich im Kapitel über Quantoren-Logik aber noch zeigen wird, gilt: $Vx(Fx) \Leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$.

Somit würde gelten: $Fx \Leftrightarrow Vx(Fx)$. Und $Vx(Fx)$ bedeutet: ‚Es gibt mindestens ein x, für das gilt: es hat die Eigenschaft F'. Dies ist aber ein *Satz*, der durchaus wahr oder falsch ist.

Fazit: Es ist offensichtlich schwierig, eine klare *semantische* bzw. *logische* Definition einer Variablen zu finden. Die beste Lösung ist doch die *Disjunktion von Konstanten*. Wenn einem die genannten Probleme hierbei zu bedenklich scheinen, muss man sich notfalls doch mit der *syntaktischen* Definition der „Leerstelle" zufrieden geben.

2) *Normale Sprache*

Die Frage ist nun, was sich daraus für die *normale Sprache* ergibt. Wie ist die Individuen-Variable ‚x' normal-sprachlich zu verstehen? Generell ist 'x' hier zu übersetzen als *‚Objekt'* (‚Ding', ‚Gegenstand') o. ä. Dabei ist folgendes zu bedenken: In der normalen Sprache werden Individuen- und Klassen-Zeichen anders gehandhabt als in der logischen Sprache. In der formalen Sprache hat man die Individuen-Variable ‚x', auf die ein *Quantor* (z. B ‚Λ') angewandt wird und der dann *Prädikatoren* (Eigenschafts- oder Klassen-Ausdrücke wie ‚F') zugeordnet werden, z. B. Λx(Fx).

In der normalen Sprache werden aber Klassen-Ausdrücke (bzw. Eigenschafts-Ausdrücke) selbst *quantifiziert*, dabei jedoch *individualisiert*. Diesen Klassen-Ausdrücken werden andere Klassen-Ausdrücke zugeordnet. Z. B. ‚Alle Menschen sind sterblich'. Der Quantor „alle" richtet sich hier auf den Klassenausdruck ‚Mensch'. Dann wird ‚Mensch' der Eigenschafts-Ausdruck ‚sterblich' zugeordnet. In diesem Zusammenhang ist es auch keineswegs trivial, ob ‚Objekt' als Individuums-Zeichen oder Klassen-Zeichen zu verstehen ist (vgl. unten).

Dennoch will ich hier für ‚x' ‚Objekt' einsetzen, weil das noch am ehesten der formalen Sprache entspricht; Varianten sind: x = Objekt, x = das (dieses) Objekt, x = irgendein Objekt.

Fassen wir die Aussagen über *Individuen-Konstanten* und *-Variablen* noch mal zusammen:

1. <u>normal-sprachlich</u>
   - *Konstanten*: ‚Sokrates', ‚Platon'
     konstanter Satz: ‚Sokrates ist Philosoph'
   - *Variablen*: ‚Objekt' (der Status von Individuen-Variablen ist hier problematisch)
     variabler Satz: ‚Objekt ist Philosoph'
     ggf. ‚Sokrates oder Platon oder Aristoteles oder anderes Objekt ist Philosoph'

2. <u>logik-sprachlich</u>
   - *Konstanten*: ‚x_1, x_2, x_3' usw., allgemein ‚x_i' bzw. ‚y_i' (keine echten Konstanten)
     konstanter Satz: ‚x_1 ist Philosoph'
   - *Variablen*: ‚x', ‚y'
     Satzform: *ungebundene* Variable: ‘x ist Philosoph'
     variabler Satz: *gebundene* Variable: z. B. ‚Vx(x ist Philosoph)'

0-2-4-4 KLASSEN-ZEICHEN BZW. EIGENSCHAFTS-ZEICHEN

1) *Formale, logische Sprache*
Als Klassen- bzw. Eigenschafts-Zeichen verwendet man in der Logik überwiegend:
‚F', ‚G', ‚H' bzw. ‚F_1', ‚F_2' usw.
Man kann differenzieren zwischen Klassen ‚K(F)' und Eigenschaften ‚E(F)'.

Genau wie bei den *Individuen-Zeichen* gilt auch hier: Letztlich kann die *formale* logische Sprache prinzipiell keine echten Konstanten besitzen, weil sie eben formal ist und nicht inhaltlich bestimmt (die Argumentation braucht nicht noch einmal wiederholt werden).

Ich verstehe die obigen Zeichen also zunächst als *Variablen*. Aber sollten sie in einem Kontext als *Konstanten* verstanden werden, will ich dies nicht durch zusätzliche Indizes wie in ‚F_i', ‚F_j' verkomplizieren. Auch ‚F_1', ‚F_2' sind offen für beide Interpretationen, als Konstanten und Variablen. Ggf. kann man Zeichen wie ‚Mn' (mit der Bedeutung ‚Mensch') verwenden, wenn es notwendig sein sollte, sie als Konstanten auszuweisen.

Es ist aber für die Logik gar nicht so wesentlich, ob man mit Konstanten oder mit Variablen als *deskriptiven* Zeichen arbeitet. Die *Unterscheidbarkeit* ist wichtig, ich muss nicht wissen, welche Bedeutung ‚x_1' und ‚x_2' haben, es reicht, dass ich sie *unterscheiden* kann.

2) *Normale Sprache*
Hier sind die Verhältnisse komplizierter. So ist die Abgrenzung zwischen *Individual*-Zeichen und *Klassen*-Zeichen nicht eindeutig. Z. B. ist ‚Mensch' primär ein *Klassen-Zeichen* (bzw.

Eigenschafts-Zeichen), denn ‚Mensch' bezeichnet die Klasse der Menschen (oder die Eigenschaft „Mensch"). Aber man kann ‚Mensch' quasi wie eine *Individuums*-Variable verwenden. ‚Mensch ist sterblich' sei die *Satzfunktion*. Durch Einsetzen von z. B. ‚Platon' erhalte ich den wahren Satz: ‚Platon ist sterblich'. Andererseits kann man auch durch Quantifizierung von ‚Mensch' einen Satz erzeugen: ‚Für alle Menschen gilt: sie sind sterblich'.

Auch die Abgrenzung von *Konstanten* und *Variablen* bereitet Probleme. Z. B. in der *Satzform* ‚x ist ein Mensch' fungiert ‚x' als Variable und ‚Mensch' als Konstante. Aber ich schon oben gezeigt habe: man kann ‚Mensch' auch wie eine Variable verwenden, denn ‚Mensch' lässt sich ja auf ganz unterschiedliche Individuen anwenden, auf Sokrates, Platon usw. Das gilt offensichtlich generell in der normalen Sprache. Zunächst kann man darauf hinweisen: Es gibt Zeichen *unterschiedlicher Bestimmtheit*, z. B. das Wort ‚Lebewesen' hat weniger Merkmale (kleinere Intension) als der Begriff ‚Pflanze', bezieht sich aber in der Wirklichkeit auf mehr Objekte (größere Extension). So gesehen ist ‚Lebewesen' in größerem Ausmaß eine Variable als ‚Pflanze', denn es ist vieldeutiger. So könnte man eine *Kette unterschiedlicher Variabilität* aufstellen, z. B. ergibt sich folgende Reihenfolge: Lebewesen – Pflanze – Blume – Rose. ‚Lebewesen' ist unbestimmter als ‚Pflanze' usw.

0-2-4-5 QUANTITATIVE THEORIE DER BESTIMMTHEIT

Sowohl in der Logik wie in der normalen Sprache gibt es (in unterschiedlicher Weise) keine eindeutige und klare Abgrenzung von Konstanten und Variablen. Entsprechend steht eine wirklich präzise Theorie von Konstanten versus Variablen noch aus.

Bei einer solchen Theorie müsste es um eine Relativierung des Unterschiedes von Konstante und Variable, zugunsten einer *quantitativen* Theorie der *Bestimmtheit*. Ist ein Objekt bzw. ein Zeichen *total bestimmt* (reine Konstante) oder wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Bei *unendlichen vielen* Möglichkeiten ist es *absolut variabel*. Allerdings geht es dabei um die *wechselnde* Verwendung, eine Klassen-Konstante bezeichnet die Klasse als Ganze – mit vielen Elementen –, sie bleibt dennoch eine Konstante.

Eine *quantitative Formel* von Konstanz bzw. Variabilität könnte folgendermaßen aussehen:

p(Konstanz) = 1/n.

Dabei ist n die *Anzahl von Bedeutungen*, für die das Zeichen alternativ/wechselnd stehen kann. Nur bei p(Konstanz) = 1 liegt im strengen Sinn eine *Konstante* vor.

Veranschaulichen wir uns das an der Individuen-Variablen ‚x':

Variable	Bedeutung	p(Konstanz)
‚x'	x_1	1/1 = 1
	x_1, x_2	1/2 = 0,5
	x_1, x_2, x_3	1/3 = 0, 33
	x_1, x_2, x_3, x_4	1/4 = 0,25
	....	
	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	1/n
	$x_1, x_2, \ldots$	$1/\infty \approx 0$ (oder: $1/\infty = 0$)

0-2-5 Relationen

0-2-5-1 LOGISCHE RELATIONEN

Relationen sind neben *Objekten* (bzw. Eigenschaften) die zweite Basiskomponente der Logik. Relationen sind Beziehungen, Verhältnisse zwischen zwei oder mehr Entitäten.

• *Extensionale und intensionale Relationen*
– *extensional*:
atomar: Relationen zwischen *Objekten*, also zwischen Individuen, Mengen/Klassen
molekular: Relationen zwischen *Objekt-Relationen*
– *intensional*:
atomar: Relationen zwischen *Eigenschaften*
molekular: Relationen zwischen *Eigenschafts-Relationen*
– *gemischt extensional-intensional*:
atomar: Relationen zwischen Objekten und Eigenschaften
molekular: Relationen zwischen *gemischten Relationen*

• *Relationen versus Objekte*: Relationen sind einerseits klar von *Objekten* zu trennen. Relationen bzw. Strukturen, z. B. Aussagen, sind wahr oder falsch, von Objekten kann man dagegen nicht sagen, sie sind wahr oder falsch (jedenfalls nach üblicher Deutung). Andererseits haben wir gesehen: Ein Objekt ist ein Träger, der bestimmte Eigenschaften „trägt". Dies heißt aber nichts anderes, als dass der *Träger in Relation zu diesen Eigenschaften* steht. Insofern geht der Begriff der Relation also schon in die Definition des Objekts ein. Nur wenn man von *formalen* Objekten ausgeht, sind diese ohne direkten Rückgriff auf Relationen zu fassen.

Die gleiche Thematik hatte man schon bei Objekten und Eigenschaften. *Inhaltlich* bestimmte Objekte enthalten bereits Eigenschaften, nur *formale* Objekte sind frei von Eigenschaften.

Dass sich hier – bei inhaltlicher Deutung – gewisse Überschneidungen zwischen den Grundbegriffen ergeben, sehe ich aber nicht als echtes Problem. Es verweist darauf, dass es sich bei Objekten, Eigenschaften und Relationen um Komponenten eines *Systems* handelt.

• *Ebene der Relation*: sprachlich = Aussage/Satz, psychisch = Urteil, real = Sachverhalt. Logische Relationen enthalten aber in keinem Fall *räumliche*, *zeitliche*, *kausale* oder andere reale Komponenten. So besteht bei der *Implikation* $X \rightarrow Y$ oder dem *Schluss* $\Phi \Rightarrow \Psi$ *keine zeitliche Folge*. Sondern es geht bei ihnen nur um (quantitatives) *Enthaltensein*, *gemeinsames Auftreten, funktionale Abhängigkeiten* o. ä. Das wird noch genauer erläutert werden.

• *Logische und hyper-logische Relationen*
– *Hyper-logische* Relationen sind z. B. *kausale* Wirkung, *räumliche* Nähe, *zeitliche* Folge, *Zielgerichtetheit* usw.
– *Logische Relationen* liegen *hyper-logischen* (über-logischen) Relationen wie z. B. *Kausalität* zugrunde. Das heißt, die kausalen Ursache-Wirkungs-Relation hat eine logische Struktur, es kommen aber noch andere Komponenten hinzu, etwa der Faktor Zeit – die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Dennoch muss man logische Relationen nicht auf *abstrakte* Objekte beziehen, logische Relationen bestehen sehr wohl auch zwischen raum-zeitlichen Objekten.

• *Definition einer Relation*
Man kann für eine *logische Relation* schreiben:

$X\ R\ Y$. Soll heißen: X steht zu Y in Relation.
Alternative Schreibweise: $R(X,Y)$

Will man auf eine *bestimmte* Relation verweisen, kann man schreiben: $R_i(X,Y)$

Nehmen wir als Beispiel die Relation $X \rightarrow Y$.
Genauer kann man unterscheiden:

$X \rightarrow Y$	*Relationssystem* bzw. *Struktur* (das Ganze)
X, Y	*Relata*
$\rightarrow$	*Relation* (die Beziehung)
‚$\rightarrow$'	*Relator* (das Zeichen)

Noch allgemeiner wäre zu schreiben R(Φ,Ψ), wobei Φ und Ψ für beliebige Entitäten stehen können.

Der Terminus '*Relationssystem'* (oder ‚*Relationsgefüge'*) ist recht sperrig. Ich nutze daher vorwiegend zwei Alternativen:

- Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, verwende ich 'Relation' auch für $X \rightarrow Y$ und nicht nur für die *eigentliche* Relation $\rightarrow$.
- Oder ich verwende (wie gesagt) für das Relationssystem $X \rightarrow Y$ den Terminus 'Struktur'.

• *Subjekt und Prädikat*: Herkömmlich unterscheidet man in einem Satz zwischen *Subjekt* und *Prädikat*. Man könnte diese Unterscheidung auch auf eine Relation beziehen. Nur ist diese Unterscheidung primär eine *pragmatische*: man wählt eine Entität als diejenige aus, *über die* man etwas aussagt (Subjekt), indem man ihr etwas anderes zuordnet (Prädikat).

Aber in einer Relation X R Y ist es logisch gesehen nicht von Relevanz, welches Relat man als Subjekt oder Prädikat auswählt. Es ist logisch gleichgültig, ob man z. B. formuliert:

„X ist Vorfahre von Y" (X = Subjekt) Oder: „Y ist Nachfahre von X" (Y = Subjekt).

Es liegt dieselbe Relation zugrunde. Es recht gilt das bei primär logischen Strukturen wie „$X \rightarrow Y$". Diese ist logisch äquivalent mit „$Y \leftarrow X$".

0-2-5-2 RELATOREN

Logische Relationen werden formal durch *Relatoren* ausgedrückt. Es gibt Relatoren der *Prädikaten-Logik* wie ‚$\in$', der *Klassen-Logik* wie ‚$\subset$', am wichtigsten sind aber die Relationen der *Aussagen-Logik*. Bei 2 Aussagen X, Y sind 16 Relatoren bzw. Relationen gegeben. Sinnvoller ist allerdings, von der Zahl 14 (für synthetische Relationen) auszugehen, wie noch zu zeigen sein wird. Die vollständige Liste aller Relatoren wird später gebracht.

Die wichtigsten Relatoren sind:

• Konjunktion	und	formal: $\wedge$	$X \wedge Y$
• Disjunktion	oder (inklusiv)	formal: $\vee$	$X \vee Y$
• Kontravalenz	oder (exklusiv)	formal: ><	X >< Y
• Exklusion	oder (nicht beide)	formal: |	X | Y
• Implikation	wenn – dann	formal: $\rightarrow$	$X \rightarrow Y$
• Äquivalenz	nur wenn – dann	formal $\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$

Ich unterscheide dabei 3 *oder*-Relationen:

• *Disjunktion* (*subkonträrer* Gegensatz)

Die Disjunktion $X \vee Y$ schließt – als Möglichkeit – ein, dass X und Y beide positiv sind. Die Disjunktion ist deshalb *inklusiv*.

• *Kontravalenz* (*kontradiktorischer* Gegensatz)

Die Kontravalenz X >< Y meint „entweder – oder": nicht beides und nicht beides nicht. Sie schließt also aus, dass X und Y positiv sind, ich bezeichne sie daher als *exklusiv*. Als Symbol für die Kontravalenz nehme ich das ><, quasi ein umgekehrtes Äquivalenz-Zeichen $\leftrightarrow$ (denn die Kontravalenz ist die Umkehrung der Äquivalenz).

• *Exklusion* (*konträrer* Gegensatz)

> Es gibt einen dritten Relator, den man auch zuweilen mit „oder“ übersetzt. Dieses „oder“ schließt nur aus, dass X und Y beides gilt. Als Symbol dient der „Sheffer Strich“: X | Y. Man nennt ihn meistens „*Exklusor*“ und die dazu gehörige Relation „Exklusion“. Diese Bezeichnung ist leider sehr unglücklich, denn unter exklusivem „oder“ versteht man üblicherweise die Kontravalenz.

Eine Sonderrolle spielt die *Negation* mit dem Negator $\neg$. Dadurch wird eine *positive* Relation (ein wahrer Satz) X in eine *negative* Relation (einen negierten bzw. falschen Satz) $\neg$X umgewandelt.

0-2-5-3 RELATIONEN UND VERKNÜPFUNGEN

Für die *Implikation* „wenn - dann“ ist die Bestimmung als *Relation* unproblematisch. Aber Termini wie „und“ (Konjunktion) bzw. „oder“ (Disjunktion) sind nicht direkt als Relationen erkennbar.

Von daher ist es verständlich, dass die Logik überwiegend nicht von Relationen ausgeht, sondern von *Verknüpfungen*. Darauf verweist auch der Begriff *Junktor* (von lat. jungere = verbinden), welcher in der Logik überwiegend anstatt ‚Relator’ verwendet wird. Denn als Verknüpfungen sind alle logischen Verbindungen, also auch die Implikation, gut zu interpretieren. Und da die moderne Logik sich eben primär auf Aussagen bezieht, geht man von der *Verknüpfung von Aussagen* aus. Aber wo bleiben dann die Relationen?

Angenommen, wir bestimmten die Konjunktion $X \wedge Y$ als *Verknüpfung* und die Implikation $X \rightarrow Y$ als *Relation*. Nun lässt sich aber die Konjunktion $X \wedge Y$ (Verknüpfung) in eine Implikation umformen, nämlich in $\neg(X \rightarrow \neg Y)$, also in eine Relation. Das ist natürlich noch kein Beweis für den Vorrang der Relation, denn umgekehrt kann man auch $X \rightarrow Y$ (Relation) in eine Konjunktion (Verknüpfung) umwandeln, nämlich in $\neg(X \wedge \neg Y)$. Aber es zeigt, dass die Konjunktion und die Implikation logisch auf *einer* Ebene liegen.

Ich halte den Ansatz der *Relation* für sehr viel fundierter. Der Ansatz der Relation wird besser verständlich, wenn man sich klar macht: Bezogen auf Aussagen bedeutet die Konjunktion $X \wedge Y$: „Die Aussagen X und Y sind *zusammen* wahr“. Daran wird deutlich, dass ein Verhältnis, also eine Relation zwischen X und Y besteht.

Dennoch mag man informell auch den Begriff der Verknüpfung verwenden, vor allem für komplexe Relationen wie $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$.

Wenn man aber ganz präzise vorgeht, sollte man unterscheiden:

- *Verknüpfungen*
  Dies sind Verknüpfungen von *Mengen* wie Schnitt-Menge oder Vereinigungs-Menge (bzw. die entsprechenden Operatoren $\cap$ und $\cup$).
  Mengen-Verknüpfungen wie $M \cap N$ oder $M \cup N$ sind wiederum Mengen, sie sind daher *nicht* wahr (positiv) oder falsch (negativ).
- *Relationen*
  Diese betreffen alle „Junktoren“ bzw. Relatoren der Logik ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw.) sowie Relatoren der Mengenlehre ($\subset$, $\supset$, = usw.). Sie sind wahr (positiv) oder falsch (negativ).

0-2-5-4 WAHRHEITS-TAFELN

Die Relationen (Relatoren) werden durch *Wahrheitswerte* bzw. eine *Wahrheitswerte-Tafel*, kurz: *Wahrheitstafel*, definiert. Dabei wird von Aussagen ‚A’ und ‚B’ usw. ausgegangen, die *wahr* (w) oder *falsch* (f) sein können. Ich wähle aber die *neutrale* Form ‚X’ und ‚Y’. Und anstatt *w* oder *f* schreibe ich neutral + oder –.

Generell kann man sagen: Eine logische Komponente X bzw. Y ist:

gültig (+) Alternativen: *belegt*, *positiv*
ungültig (–) Alternativen: *nicht belegt*, *negativ*

Ich schränke den Begriff ‚gültig' / ‚ungültig' also nicht auf logische Schlüsse bzw. *logische, analytische* Wahrheit ein, wie dies sonst oft geschieht.

In der Wahrheitstafel werden die *möglichen Welten* angegeben. Bei 2 Relata (bzw. 2 Aussagen oder 2 Variablen) X und Y ergeben sich $2^2 = 4$ *mögliche Welten* oder *logische Welten*: D. h. es wird angeben, welche *Kombinationsmöglichkeiten* von X und Y es gibt:

$$X \wedge Y,\ X \wedge \neg Y,\ \neg X \wedge Y,\ \neg X \wedge \neg Y$$

Dann wird angegeben, bei welchen dieser Möglichkeiten, in welcher dieser Welten, der betreffende Relator (bzw. die Relation) als gültig gilt.

Für die Implikation X→ Y ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

X → Y	oder	X Y	→
+ + +		+ +	+
+ – –		+ –	–
– + +		– +	+
– + –		– +	–

Die wichtigste Deutung der Wahrheitstafel ist: Man schließt von X und Y auf X → Y. Also z. B.: Wenn X, Y gültig sind (X+, Y+), dann ist auch X → Y bzw. → gültig (+) usw.

Aber insgesamt sind folgende Deutungen der Wahrheitstafel möglich:

- Man schließt von X,Y auf X → Y
- Man schließt von X auf X → Y
- Man schließt von Y auf X → Y
- Man schließt von X →Y auf X,Y
- Man schließt von X → Y auf X
- Man schließt von X → Y auf Y

X → Y ist also in 3 Welten belegt bzw. wahr. Diese Welten sind hier durch folgende Parameter gekennzeichnet X ∧ Y, ¬X ∧ Y, ¬X ∧ ¬Y. Das darf man nun nicht so verstehen, dass diese drei (bzw. sogar alle vier) Welten nebeneinander bestehen. Nur *eine* Welt ist *real*, die anderen drei sind zwar theoretisch möglich, aber *irreal*. Es ist unmöglich, das auch nur 2 dieser Welten nebeneinander bestehen, denn sie sind alle zueinander *kontradiktorisch*.

Z. B. ist die *Kombination*, also die *Konjunktion* (X ∧ Y) ∧ (X ∧ ¬Y) kontradiktorisch, und das gilt auch für alle anderen Kombinationen; wenn man nur die *2er*-Kombinationen berücksichtigt, dann gibt es 7 Kombinationen, diese stehen alle für *unmögliche* Welten.

Denkbar ist nur, dass man den *Geltungsbereich* der verschiedenen Welten einschränkt, vor allem:

• *zeitlich*: zum *jetzigen Zeitpunkt* gilt die Kombination Φ (z. B. X ∧ Y), aber zu einem *anderen Zeitpunkt* gilt die Kombination Ψ (z. B. ¬X ∧ ¬Y). Diese zeitliche Einschränkung bzw. Differenzierung ist die wichtigste.

• *räumlich*: an einem *Ort* (z. B. dem Ort o_i) gilt die Kombination Φ, aber an einem anderen Ort (z. B. dem Ort o_j) gilt die Kombination Ψ.

• *konditional*: unter der einen *Bedingung* gilt die Kombination Φ, aber unter einer anderen Bedingung gilt die Kombination Ψ.

Als wichtigste Relationen hatte ich genannt: X ∧ Y, X ∨ Y, X >< Y, X / Y, X → Y, X ↔ Y

Die *Wahrheitswertetafeln* für die entsprechenden Relatoren sind:

X	Y	$\wedge$	$\vee$	><	/	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

0-2-5-5 DIE POSITIV-IMPLIKATION

Die Implikation wirft verschiedene Probleme auf, sie führt zu *paradoxen* Ergebnissen und sie entspricht auch nicht unserem *normalen Sprachgebrauch* (genauer dazu später in 1-1-1-2).

Gehen wir von folgendem einfachen Beispiel aus:
„Wenn es regnet, ist die Strasse nass“. Mit dem Implikations-Pfeil $\rightarrow$ geschrieben:
„Es regnet $\rightarrow$ Die Strasse ist nass“

Es regnet	$\rightarrow$	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Die Implikation X $\rightarrow$ Y ist also auch gültig (+), wenn das Vorderglied X ungültig (–) ist. Danach ist die Beispiel-Relation auch gültig, wenn es nicht regnet, egal, ob die Strasse nass ist oder nicht. Konkret, die Gesamtstruktur „Es regnet $\rightarrow$ Die Strasse ist nass“ könnte sogar gültig sein, wenn es niemals regnet und die Strasse immer trocken bleibt. Das entspricht sicher nicht der Bedeutung des Satzes, wie wir ihn in *normaler Sprache* verwenden.

Aber unabhängig von diesem Beispiel, die Definition der Implikation X $\rightarrow$ Y entspricht *generell* nicht der Deutung von *Wenn-dann-Sätzen* in der normalen Sprache. Denn die *normal-sprachliche* Implikation gilt nicht als wahr, wenn der Vordersatz (X) falsch ist. Um normal-sprachliche Strukturen (Sätze) zu formalisieren, bietet sich daher eine andere Implikation an.

Doch die Implikation ist nicht nur problematisch im Hinblick auf die *normale Sprache*, sondern sie führt auch *innerhalb der Logik* zu *Paradoxien*, wenn man sie als *Folge-Beziehung* interpretiert). Dies gilt für *synthetische* Implikationen wie X $\rightarrow$ Y und für *analytische* Implikationen (Schlüsse) wie X $\Rightarrow$ X. Da aus einem *falschen* Vorder-Satz die Wahrheit des Gesamt-Satzes folgt, kann man $\neg$X $\Rightarrow$ (X $\rightarrow$ Y) schreiben. Wenn nun der Vorder-Satz nicht nur einfach ein falscher Satz ist, sondern ein *kontradiktorischer*, d. h. *logisch falscher* Satz, dann kann man aus diesem Satz *jeden beliebigen anderen Satz* logisch ableiten, wie später noch genau gezeigt werden soll. Man kann aus einem kontradiktorischen Satz sogar sein *eigenes Gegenteil* logisch ableiten, z. B. (X $\wedge$ $\neg$X) $\Rightarrow$ $\neg$(X $\wedge$ $\neg$X). Dies ist nicht gerade erwünscht in der Logik. Man könnte daher fordern, dass ein Schluss aus einem *falschen* oder sogar *kontradiktorischen* Vorder-Satz „verboten“ sei, so wie in der Mathematik z. B. die *Division durch die Zahl 0* verboten ist, weil sie zu paradoxen Ergebnissen führt.

Da aber eine Implikation, die für *alle* Welten definiert ist – einschließlich derjenigen, in den der Vorder-Satz falsch ist – auch Vorteile hat, ist es sinnvoller, man *ergänzt* die normale Implikation durch eine andere Implikation, in der die geschilderte Problematik nicht auftritt.

Positiv-Implikation

Ich nenne diese andere Implikation ‚*Positiv-Implikation'* und verwende das *Symbol* *→, für die *Gesamt-Relation* X *→ Y. Es wird also der Pfeil → der normalen Implikation genommen und ein Stern * davor gesetzt. Man kann sie auch kurz *Implikation schreiben.

Der Name erklärt sich wie folgt: Die Positiv-Implikation ist nur für die Fälle definiert, in denen das Vorderglied gültig, also *positiv* (+) ist.

Die Positiv-Implikation wird in 2 Varianten eingeführt:

1)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

2)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

1) *verkürzte* Form

Im ersten Fall werden nur die 2 Welten in der Wahrheitstafel *aufgeführt*, in denen die Positiv-Implikation definiert ist, also in denen das Vorderglied (der Vordersatz) X positiv (+) ist.

2) *vollständige* Form

Im zweiten Fall werden zwar alle 4 Welten genannt, aber in den zwei Welten, in denen der Wenn-Satz falsch ist, bleibt der Wert der Relation *undefiniert* (Symbol □).

Beide Varianten der Positiv-Implikation haben ihre Vorteile, ich verwende sie alternativ, mit dem gleichen Symbol, um nicht unnötig neue Symbole einzuführen. Dazu ein *Beispiel*:

Es regnet	*→	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

Hier zeigt sich also: Wenn der Vordersatz falsch ist, wenn es also nicht regnet, dann ist der Wahrheitswert des Satzes *nicht definiert*, man kann seinen Wahrheitswert nicht angeben.

Generell gilt: Die oben aufgezeigten Paradoxien treten bei der Positiv-Implikation nicht auf, weil ein Schluss von einer *negierten* oder *kontradiktorischen* Prämisse aus *undefiniert* bzw. *unbestimmt* ist, wie noch im Einzelnen gezeigt werden wird.

Beide Implikationen X → Y und X *→ Y haben ihre Berechtigung. Für die *normale Implikation* X → Y spricht: Es ist aus systematischen Gründen sinnvoll, die Implikation in *allen* möglichen (d. h. bei 2 Variablen = 4) Welten zu definieren, und eine andere Deutung der Wahrheitswerte bietet sich auch nicht zwingend an. Nur so lässt sich die Implikation problemlos in andere Junktoren umformen, die auch für 4 Welten definiert sind.

Man kann es auch so ausdrücken: Die normale Implikation X → Y ist, wie alle aussagenlogischen Relatoren, *streng wahrheitswert-funktional*, ihr Wahrheitswert ist eine *vollständige* Funktion der Wahrheitswerte der Teile X und Y. Dagegen ist die Positiv-Implikation nur *eingeschränkt wahrheitswert-funktional*, es wird nur für zwei von vier Welten ein Wahrheitswert für X *→ Y angegeben. Das Verhältnis dieser beiden Implikationen → und *→ wird uns im ganzen Text immer wieder beschäftigen.

0 – 3 EXTENSION UND INTENSION

Die Begriffe ‚*Extension'* und ‚*Intension'* sind schon mehrfach verwendet worden, sie sollen hier aber genauer erläutert untersucht werden. Die Verhältnisse von Extension und Intension scheinen auf den ersten Blick ziemlich einfach, und so werden sie auch in der Literatur meistens dargestellt. Bei genauerer Analyse erweisen sie sich aber – leider – als äußerst komplex; und so muss eine adäquate Darstellung auch ziemlich kompliziert ausfallen,

Die Unterscheidung *Extension - Intension* findet sich, mit unterschiedlicher Terminologie, in fast jeder Logik, und zwar bei allen *drei* genannten Ansätzen, z. B. in folgender Weise:

- Modell *Psyche*: Extension = der Umfang, Intension = der Inhalt (z. B. eines Denkbegriffs)
- Modell *Realität*: Extension = Objekte (bzw. Relationen zwischen Objekten), Intension = Eigenschaften (bzw. Relationen zwischen Eigenschaften)
- Modell *Sprache*: Extension = (Umwelt-)Referent, Intension = der Sinn.

Verwandte Begriffe sind:

Extension = das Bezeichnete, *Denotat, Referenz* (engl. reference)
Intension = das Bedeutete, *Signifikat*, *Bedeutung* (engl. meaning)

Bedeutung kann allerdings auch als Oberbegriff (für Extension und Intension) dienen.

Am häufigsten geht man – meta-sprachlich – von der *Sprache* aus, fragt also nach der Extension / Intension von *Zeichen* bzw. *Sätzen*. Dies halte ich hier auch so.

Danach sind Extension und Intension Arten von *Bedeutung*. Nun kann sich Bedeutung – in der normalen Sprache – wiederum auf die drei oben genannten Bereiche *Psyche*, *Realität* und *Sprache* beziehen, es lassen sich also psychische, reale und sprachliche Bedeutung unterscheiden – bzw. eine *neutrale* Bedeutung, die aber der realen am nächsten steht.

Die Intension wird zwar oft auch als *Sprachgebrauch* bzw. *Regeln* des Sprachgebrauchs bestimmt, dies ist aber m. E. nur eine Zwischenerklärung, die letztlich doch wieder Bezug auf Objekte, Eigenschaften o. ä. nehmen muss.

Ich ziehe vor, Extension und Intension als *reale* oder realistische bzw. neutrale Bedeutung auffassen. Somit beziehen sie sich auf Objekte, Eigenschaften oder Relationen.

Ehe wir in die komplizierte Materie einsteigen, zunächst eine *Übersicht*.

1. Extension und Intension eines *Zeichens* (oder eines Wortes)
   - Extension: *Objekte* (Individuen bzw. Klassen)
   - Intension: *Eigenschaften* (welche diese Objekte bestimmen)

2. Extension und Intension eines *Satzes* (oder eines Zeichengebildes)
   - Extension: *Sachverhalte* = *Relationen zwischen Objekten* wie Individuen, Klassen (und komplexe Relationen zwischen Sachverhalten)
   - Intension: „*Begriffsverhalte*" = *Relationen zwischen Begriffen* bzw. *Eigenschaften* (und komplexe Relationen zwischen Begriffsverhalten)

Basis ist die Bestimmung der Extension und Intension von *Zeichen* bzw. *Wörtern*. Darauf gehe ich zunächst ein.

0-3-1 Intension von Zeichen

0-3-1-1 BEGRIFF VERSUS EIGENSCHAFT

Die *Intension* von Zeichen sind *Eigenschaften.* Anstatt '*Eigenschaft'* könnte man auch '*Begriff'* sagen. Das Wort 'Begriff' ist aber sehr vieldeutig. Man kann zumindest unterscheiden zwischen dem *Sprach-Begriff* im Sinne von *Wort* bzw. Terminus und dem *Denk-Begriff* sowie dem *Real-Begriff.* Obwohl es aus Gründen der Eindeutigkeit vorzuziehen wäre, ‚Begriff' nur in *einer* Bedeutung zu verwenden, verwende ich 'Begriff' doch in mehrfacher Weise, weil der Begriff ‚Begriff' eben kaum vermeidbar ist, wenn man nicht ständig ‚Eigenschaft' wiederholen will. Normalerweise dürften dabei keine gravierenden Missverständnisse auftreten.

Man kann ‚Eigenschaft' und ‚Begriff' weitgehend *synonym* verwenden. Allerdings besteht insofern ein Unterschied, dass man mit ‚Eigenschaft' meistens eine *einfache Qualität* meint, z. B. die Farbe, mit ‚Begriff' aber auch eine *komplexe Qualität*, also ein *System von Eigenschaften*. So ist es im Grunde adäquater, von dem Begriff „Mensch" anstatt von der Eigenschaft „Mensch" zu sprechen. Oder wenn man z. B. einen bestimmten Menschen begrifflich kennzeichnen will, spricht man besser von ‚Individual-Begriff' als von ‚Individual-Eigenschaft', denn darunter stellt man sich eher eine einzelne Eigenschaft vor als etwa den Gesamtbegriff „Sokrates". Auch wenn ich von ‚Begriff' spreche, verwende ich aber als Abkürzung bzw. Symbol ‚E', z. B. ‚E(Mensch)', damit es nicht zu Verwechslungen kommt, denn das Symbol ‚B' wird (wie ‚A') gerne für Aussagen verwendet.

0-3-1-2 INTENSION VON INDIVIDUATOREN

Ein Individuator (Synonyme sind: Individuum-Zeichen, Individuen-Zeichen bzw. Individual-Zeichen) ist ein *Eigenname* (wie ‚Sokrates'), eine *singuläre Kennzeichnung* wie (‚der Begründer der sokratischen Methode') o. ä.

Die Intension eines *Individuators* ist zunächst eine *Individual-Eigenschaft* bzw. ein *Individual-Begriff.* Dabei geht man davon aus, dass *jeder* Individual-Begriff einzigartig ist (wie jedes Individuum). Bei einem *realistischen* Ansatz, wie hier vertreten, muss allerdings auch bei der intensionalen Bestimmung letztlich auf das *Individuum* (Objekt) Bezug genommen werden, denn Eigenschaften ohne Objekte gibt es real nicht. Der *Individual-Begriff* ist der *ganzheitliche* Begriff, welcher das entsprechende Individuum *wesentlich* bestimmt.

Nun können wir die Bestimmung der Intension über zumindest 2 *Stufen* vollziehen, z. B.:

1. *Stufe*: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates)
2. *Stufe*: Intension(‚Sokrates') = E(Philosoph ∪ Begründer der sokratischen Methode u. a.)

Diese beiden Stufen sind logisch und semantisch sehr unterschiedlich, wie sich zeigen wird.

1. Stufe: Intension(Individuator) = Individual-Begriff
Beispiel: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates)

Die Intension des *Eigennamens* ‚Sokrates' auf der 1.Stufe ist der *Individuum-Begriff* „Sokrates". *Adjektivisch* formuliert: Intension(‚Sokrates') = E(sokratisch).

D. h. der *Individual-Begriff* „Sokrates" ist der *einzelne* Begriff, die *Gesamt*-Eigenschaft, welche Sokrates wesentlich bestimmt.

Obwohl hier Sokrates die Eigenschaft „sokratisch" als *wesentlich* zugesprochen wird, macht man auf der *1. Stufe* keine Aussage über das *Wesen* des Sokrates, macht im Grunde gar keine Aussage über ihn. Sondern es handelt sich um eine generelle sprachliche *Festlegung*, dass ein *Individuum* durch den entsprechenden Individual-Begriff wesentlich bestimmt wird.

Als Abkürzung für ‚Eigenschaft' oder ‚Begriff' verwende ich wie gesagt ‚E'.

Halb formal: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates) Formal: Intension(‚x_i') = E(x_i)

2. *Stufe*: Intension^2(Individuator) = wesentliche, definierende Eigenschaften des Individuums
Beispiel: Intension^2(‚Sokrates') = E(Philosoph $\cup$ Begründer der sokratischen Methode ...)
Um die 2. Stufe zu kennzeichnen, kann man eine *hochgestellte* 2 verwenden.

Auf der 2. Stufe werden mehrere – mindestens zwei – Eigenschaften angegeben, die den Namen ‚Sokrates' bzw. den *Individual-Begriff* „Sokrates" *bestimmen*. Letztlich geht diese Bestimmung aber zurück auf die *wesentlichen Eigenschaften des Individuums* (Objekts) Sokrates. Hier, auf der 2. Stufe, werden *echte* Aussagen über das Wesen des Sokrates gemacht.

Natürlich kann die Intension auch *mehr als zwei* Eigenschaften umfassen, z. B. formal:

$$\text{Intension}(‚x_i') = E(F_1 \cup ... \cup F_i)$$

Aber eine solche *Wesensbestimmung* umfasst kaum mehr als etwa *10* Eigenschaften (1 bis i). Die *wesentlichen* Eigenschaften könnten bei Sokrates z. B. sein: Mensch, Philosoph, weise, Athener, Erfinder der sokratischen Methode, Geburts-Jahr 469 v. Chr., Todes-Jahr 399 v. Chr. Es sind – analog zur *klassischen Definitionslehre*, die sich allerdings nur auf Prädikatoren bezog – *allgemeine* Eigenschaften wie „Mensch" und *differenzierende* wie das Geburtsdatum.

Eine andere Möglichkeit ist, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr von der *Intension* des Namens (sprachlich) auszugehen, sondern direkt von dem *Begriff* (real), also:

$$E(\text{Sokrates}) = E(\text{Philosoph} \cup \text{ Begründer der sokratischen Methode ...})$$

Die Eigenschaften werden meistens in Form in Form einer Menge, insbesondere einer *Vereinigungs-Menge* angegeben: $E(F_1 \cup ... \cup F_i)$. Dies kann als Abkürzung verstanden werden für $E(F_1) \cup ... \cup E(F_i)$. Die Eigenschaften können auch als *Schnitt-Menge* angegeben werden.

0-3-1-3 INTENSION VON PRÄDIKATOREN

Prädikatoren sind *Klassen-Zeichen* bzw. Zeichen, die sich auf *Klassen-Begriffe* oder *Allgemein-Begriffe* beziehen, z. B. ‚Mensch' oder ‚Philosoph'.

In der logischen Sprache wird normalerweise kein Unterschied zwischen *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben* gemacht, dies alles sind *Prädikatoren*.

Die Intension eines Prädikators sind die *wesentliche Eigenschaft* bzw. die *wesentlichen Eigenschaften*, welche die entsprechende Klasse definieren. Wir bestimmen entsprechend zu der Darstellung bei den Individual-Begriffen die Intension von Prädikatoren über 2 Stufen.

1. Stufe: Intension(Prädikator) = Allgemein- oder Klassen-Begriff
Beispiel: Intension(‚Mensch') = E(Mensch)
Also die Intension des Prädikators ‚Mensch' auf der 1. Stufe ist der Allgemein-Begriff „Mensch", der *einzelne* Begriff, welcher die Klasse der Menschen wesentlich bestimmt.

2. *Stufe*: Intension^2(Prädikator) = wesentliche, definierende Eigenschaften der Klasse
Beispiel: Intension^2(‚Mensch') = E(Sinnenwesen $\cup$ vernünftig).
Diese Bestimmung erfolgt gemäß der klassischen philosophischen Definition, dass der Mensch ein *vernünftiges Sinnenwesen* (animal rationale) ist.

Auf der 2. Stufe werden also mehrere – mindestens zwei – Eigenschaften angegeben, die das Wort ‚Mensch' genauer definieren.

Eine andere Möglichkeit ist wie gesagt, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr von der *Intension* (sprachlich) auszugehen, sondern direkt von dem *Begriff* (real), also:

$$E(\text{Mensch}) = E(\text{Sinnenwesen} \cup \text{ vernünftig})$$

Aus Sicht der formalen Logik können wir, wie beschrieben, z. B. "Mensch", „Philosoph", aber auch „Sokrates" (sprachlich also *Substantive*) nicht nur als Objekte, sondern auch als *Eigenschaften* fassen. Es ist allerdings, in der normalen Sprache, verständlicher, Eigenschaften durch *Adjektive* darzustellen, so ist auch eine bessere Unterscheidung von Objekt und Eigenschaft möglich.

Das wäre nicht nur auf Eigennamen, sondern auch auf *Prädikatoren* anzuwenden. Z. B. ergäbe sich: Intension(‚Mensch') = E(menschlich) bzw. Intension(‚Mensch') = menschlich.

Aber es gibt in der Sprache nicht immer entsprechende Adjektive, z. B. gibt es für ‚Pferd' kein Adjektiv ‚pferdig'. Außerdem haben die Adjektive manchmal unerwünschte *Nebenbedeutungen*: z. B. Mensch – menschlich, Mann – männlich, Frau – fraulich; es hat nicht genau die gleiche Bedeutung, ob man von jemandem sagt, er ist ein Mensch oder er ist menschlich.

0-3-1-4 ABSTRAKTE UND KONKRETE INTENSION

Ich habe bei der Intension nur auf die *wesentlichen* Eigenschaften Bezug genommen, entsprechend der Unterscheidung von *wesentlichen* und *kontingenten* Eigenschaften.

Man kann hier von *abstrakter* Intension sprechen, weil nur *einige* Eigenschaften herausgegriffen werden, von anderen dagegen *abstrahiert* wird. Dagegen kann man die Intension, die *alle* (wesentlichen und kontingenten) Eigenschaften umfasst, *konkrete* Intension nennen.

Es ist wichtig herauszustellen: Die *primäre*, die eigentliche Intension ist die *abstrakte*, diese verwenden wir in unserem Sprechen und Schreiben; die konkrete Intension ist sekundär, sie ist im Grunde nur eine Vergleichsgröße.

Wir rechnen zu einem Begriff nur die *wesentlichen* Eigenschaften. Wenn zu der Intension z. B. von dem Wort ‚Mensch' bereits *alle* Eigenschaften gehörten, die allen individuellen Menschen zukommen, dann wäre nichts Neues mehr über den Menschen auszusagen, alle Aussagen über den Menschen wären *analytisch*. Das entspricht aber natürlich überhaupt nicht unserm Sprachgebrauch. Außerdem können wir gar nicht *alle* Eigenschaften (aller Menschen) kennen. Dieses Problem soll später – bei der Extension – genauer erklärt werden.

0-3-1-5 FAZIT

Nach meiner Auffassung bezieht sich die Intension (eines Zeichens) auf die *reale* Ebene. Die *sprachliche* und *psychische* Bestimmung sind nicht unwichtig, doch ich verstehe sie als andere Formen von *Bedeutung*, nicht als Intension. Für die Intension benötigen wir eine präzise Bestimmung, dies kann die *psychische* Intension nicht leisten, auch die verwandte Definition der Intension als *Sprachgebrauch* ist zu vage; und die *sprachliche* Intension ist auf die Sprache limitiert, bleibt letztlich ein geschlossenes System ohne Real-Bezug.

Allerdings bestimme ich die Intension als *abstrakt*, sie erfasst nur die *wesentlichen* Eigenschaften von Objekten. Allenfalls könnte man unterscheiden:

primäre Intension = *abstrakte* Intension = die wesentlichen Eigenschaften
sekundäre Intension = *konkrete* Intension = alle Eigenschaften

0-3-2 Extension von Zeichen

Bei der Extension ergeben sich viele Parallelen zur Intension, weswegen ich in der Darstellung der Extension manche Punkte ausspare, um mich nicht zu wiederholen.

Wie schon beschrieben, unterscheidet man bei den deskriptiven Zeichen vor allem:

- *Individual-Zeichen* bzw. Individuen-Zeichen (Individuatoren)
- *Klassen-Zeichen* (Prädikatoren).

In einer ersten Bestimmung kann man formulieren:

Die Extension von *Individuen-Zeichen* sind *Individuen*
Die Extension von *Klassen-Zeichen* sind *Klassen*

0-3-2-1 EXTENSION VON INDIVIDUATOREN
Ein Individuum-Zeichen ist ein *Eigenname* (wie ‚Sokrates'), eine *singuläre Kennzeichnung* wie (‚der Begründer der sokratischen Methode') o. ä. Die Extension eines solchen *Individuators* (Individual-Zeichens) ist ein *individuelles Objekt*, ein *Individuum*.

Auch hier kann man wieder *2 Stufen* unterscheiden:

1. Stufe: Extension(Individuator) = Individuum

Beispiel: So ist die Extension des *Eigennamens* ‚Sokrates' das Individuum Sokrates.

Halb formal: Extension(‚Sokrates') = Sokrates. Formal: Extension(‚x_i') = x_i

Nun haben wir gesehen, dass ein Individuum auch durch einen *Träger* = formales Objekt und eine *individuelle Bestimmung* definiert werden kann. Im Beispiel: ‚Sokrates ist dasjenige Individuum, dem die Individual-Eigenschaft „Sokrates" (wesentlich) zukommt'.

Halb-Formal: Die Extension von ‚Sokrates' ist: ιx(Sokrates x). Bei *adjektivischer* Darstellung: Extension(‚Sokrates') = ιx(sokratisch x). Bzw. formal: ιx(Fx).

Um auszudrücken „*dasjenige* Objekt, das die Eigenschaft F hat", kann man den *Kennzeichnungs-Operator* verwenden: ιx(Fx). Man spricht auch von *‚Jota-Operator'*.

Allerdings liegt hier keine *streng extensionale* Darstellung vor, sondern eine *gemischt extensional-intensionale* Bestimmung vor: einem Objekt (extensional) kommt eine Eigenschaft (intensional) zu.

2. Stufe: Extension^2(Individuator) = dasjenige Individuum, dem die Eigenschaften F_1 bis F_i wesentlich zukommen. Man kann auch sagen, das Individuum *mit* seinen wesentlichen Eigenschaften.

Beispiel: Extension^2(‚Sokrates') = ιx(Mensch x $\wedge$ Begründer der sokratischen Methode x).

Natürlich können es auch *mehr als zwei* Eigenschaften sein, z. B. formal:

Extension(‚x_i') = ιx($F_1x \wedge \ldots \wedge F_ix$).

Eine andere Möglichkeit ist, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr direkt von der *Extension* (sprachlich) auszugehen, sondern von dem *Objekt* (real), also:

Sokrates = ιx(Mensch x $\wedge$ Begründer der sokratischen Methode x)

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass es schwer ist, genau zu definieren, was *wesentlich* ist. So sollen wesentliche Eigenschaften einem Individuum normalerweise *immer* zukommen. Aber z. B. ist es ein Problem, dass man Sokrates kaum als Baby schon Weisheit zusprechen könnte. Doch es nicht primäre Aufgabe der Logik, das zu analysieren.

Auf der 2. Stufe ist aber eine rein extensionale Darstellung möglich. Denn anstatt z. B. „Sokrates besitzt die *Eigenschaft* Weisheit", könnte man auch interpretieren: „Sokrates ist Element der *Klasse* aller weisen Objekte". Anstatt von *Eigenschaften* spricht man also von *Klassen-Zugehörigkeiten*. Doch bei manchen Eigenschaften ist diese Aussage ziemlich absurd: Wenn man etwa sagen würde, ‚Sokrates ist Element der Klasse aller Objekte, welche die sokratische Methode erfunden haben', ist das zwar formal korrekt, aber wenig sinnvoll, denn Sokrates ist eben der *einzige* Erfinder dieser Methode. Außerdem bereitet es grundsätzlich Probleme, auf immer weitere Klassen-Zugehörigkeiten zurückzuführen, sinnvoller ist, sich schlussendlich auf *Eigenschaften* zu beziehen.

Nachfolgend greife ich zurück auf die oben eingeführten Unterscheidungen zwischen: *formales* versus *inhaltliches* Objekt und *konkretes* versus *abstraktes* Objekt (statt von ‚Objekt' kann man hier spezifisch von ‚Individuum' sprechen) – und komme zu folgenden Aussagen:

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist *kein konkretes* Individuum

Üblicherweise wird so dargestellt, als gehe es bei der Extension um das *konkrete* Individuum. Entsprechend könnte man meinen, das Individuum wird in der Extension mit *allen* seinen *Eigenschaften* erfasst. Aber das ist unrealistisch: *erstens* wären dies extrem viele Eigenschaften, die man normalerweise nie vollständig kennen könnte; zweitens wären dann alle Aussagen über das Individuum *analytisch*. Denn wenn ich mit der Extension von ‚Sokrates' *alle* Eigenschaften von ihm bereits erfasse, dann ist ja alles Wahre, was ich über ihn aussage, *tautologisch* (und alles Falsche *kontradiktorisch*), was gänzlich unsinnig wäre.

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist *kein formales* Individuum
Ebenso problematisch wäre die ganz gegensätzliche Theorie, dass ein Objekt extensional *ohne jegliche* Eigenschaft, rein *formal* bestimmt wird. Wenn z. B. die Extension von ‚Sokrates' nur ein *formales* (singuläres bzw. individuelles) Objekt, nur ein Träger oder ein Prinzip wäre, dann besäße ‚Sokrates' dieselbe Extension wie ‚Platon', ja dann besäßen alle Individual-Zeichen die gleiche Extension.

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist ein *abstraktes* Individuum
Die Extension eines Individual-Zeichens ist also ein inhaltliches (bzw. inhaltlich bestimmtes) Individuum, aber ein abstraktes Individuum. Man könnte das abstrakte Objekt auch als *Kern* oder „Wesen" des gesamten Objektes deuten. Ein Individuum wird in der Extension nur als *abstraktes Objekt* erfasst, d. h. mit seinen *wesentlichen*, *definitorischen* Eigenschaften. Wenn ich aber über das abstrakte Individuum weitergehende Aussagen machen will, untersuchen will, welche *kontingente* Eigenschaften ihm zukommen, dann muss ich auf das *konkrete* Individuum zurückgreifen und dieses untersuchen, obwohl es nur partiell zu erfassen ist.

0-3-2-2 EXTENSION VON PRÄDIKATOREN

Die Extension eines *Prädikators* (Klassen-Zeichens) wie ‚Mensch' ist eine (abstrakte) *Klasse*, z. B. die *Klasse Mensch*. Informell sagt man: Die Extension von ‚Mensch' sind *die Menschen*.

1. Stufe: Extension(Prädikator) = Klasse
Beispiel: Extension(‚Mensch') = Klasse der Menschen
Man kann diese Klasse aber in verschiedener Weise *darstellen*:

– *ganzheitlich*:	Klasse F bzw. als Beispiel die Klasse Mensch
– *kollektiv*:	$\Lambda x[Fx]$, heißt: alle x, für die gilt, die haben die Eigenschaft F.
	andere Darstellungen: $\{x / Fx\}$ oder mit Lambda-Operator: $\lambda x(Fx)$
	Beispiel: Λx[Mensch x], $\{x$ / Mensch $x\}$, λx(Mensch x)
– *individuell*:	$x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$
	Beispiel: x_1[Mensch x_1] $\cup$ x_2[Mensch x_2] $\cup ... \cup$ x_n[Mensch x_n]

Hier sei nur auf *ein* Problem hingewiesen: Unbrauchbar sind *Zirkel*-Definitionen, z. B.:

$$\text{Klasse } F = \Lambda x[x \in F] = x_1[x_1 \in F] \cup x_2[x_2 \in F] \cup ... \cup x_n[x_n \in F]$$

„Die Klasse F ist die Menge aller x, für die gilt: sie sind Elemente der Klasse F" (u. ä.).

2. Stufe: Extension^2(Prädikator) = diejenigen Individuen, denen die Klassen-Eigenschaften F_1 bis F_i wesentlich zukommen. Bzw. die, welche Elemente der Schnittmengen von F_1 bis F_i sind.
Beispiel: Extension^2(Mensch) = Klasse aller Individuen, die Elemente der Schnitt-Menge der Klasse der Sinnenwesen und der Klasse der vernünftigen Objekte (rein extensional).
Die klassische Philosophie *definierte* den Menschen wie gesagt als *vernünftiges Sinnenwesen* (animal rationale), also durch *2* Begriffe, darauf nehme ich im Beispiel Bezug.
Auch hier ist wieder eine ganzheitliche, kollektive oder individuelle Darstellung möglich; beschränken wir uns auf die ganzheitliche Darstellung:

$$\text{Extension}^2(\text{Mensch}) = \text{Klasse(Sinnenwesen)} \cap \text{Klasse(vernünftige Objekte)}$$

Entsprechend zu den Individuen gilt bei Klassen: Es handelt sich um *abstrakte Klassen*, denn sie umfassen nur *abstrakte* Individuen. Z. B. umfasst die Klasse der Menschen alle Menschen nur mit den *gemeinsamen* Eigenschaften, die sie als Elemente der Klasse *Mensch* bestimmen, aber nicht mit ihren individuellen Unterschieden.

In der logischen Sprache wird normalerweise kein Unterschied zwischen *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben* gemacht, dies alles sind *Prädikatoren*. Insofern wird z. B. nicht unterschieden zwischen „Mensch" und „rot", beides sind – intensional gesehen – gleichermaßen *Eigenschaften*. Was ist aber z. B. die Extension vom Wort ‚rot'? Nach überwiegender Auffassung ist das die *Klasse* aller roten Gegenstände. Eine alternative Möglichkeit wäre, als Extension die Klasse aller realen Vorkommnisse von „rot" zu verstehen; aber dann wäre die Gleichbehandlung von Substantiven und Adjektiven nicht mehr gegeben.

0-3-2-3 DISKUSSION

Nun könnte man kritisieren: Es gibt hier in der Extension gar *keinen Unterschied* zwischen den *Elementen* einer Klasse, also z. B. den Menschen als Elementen der Klasse *Mensch*; der Sinn einer Aufzählung wie $\text{Mensch}_1 \cup \text{Mensch}_2 \cup \ldots \cup \text{Mensch}_n$ besteht nur in der Zuordnung eines *Zählindex*.

Konstruktiver könnte daher folgende Lösung scheinen: Als Extension eines Prädikators, in einer Klasse, werden die Elemente so erfasst, wie es der *Extension eines Eigennamens* entspricht. Z. B. in der Klasse der Philosophen wird Sokrates mit den ihn *als Individuum definierenden*, wesentlichen Eigenschaften erfasst – aber ohne *unwesentliche* Eigenschaften. Somit werden z. B. Sokrates, Aristoteles, Platon durchaus *unterschiedlich* in der Extension repräsentiert, nicht nur als Philosophen. So würde die Extension(‚Philosoph') nicht lauten „$\text{Philosoph}_1 \cup \text{Philosoph}_2 \cup \ldots \cup \text{Philosoph}_n$, sondern z. B. „Sokrates $\cup$ Platon $\cup$ Aristoteles $\cup$ ...".

Dagegen spricht aber: Wenn man das Wort ‚Philosoph' verwendet, kann man unmöglich die individuellen essentiellen Eigenschaften aller in der Extension erfassten Philosophen kennen; auch eine Aussage wie ‚jeder Philosoph ist ein Weiser' macht nur Sinn, wenn von allen individuellen Unterschieden abgesehen wird. Daher und aus anderen, hier nicht zu nennenden Gründen bevorzuge ich doch die zuerst genannte Definition:

Die Extension eines Prädikators ‚F' ist die abstrakte Klasse „F" (1. Stufe) bzw.

Die Extension^2 von ‚F' = $x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup \ldots \cup x_n[Fx_n]$ (2. Stufe)

D. h. alle Elemente von F werden nur mit den Eigenschaften erfasst, die sie als Elemente der Klasse „F" bestimmen, aber nicht mit ihren individuellen Unterschieden.

0-3-2-4 FAZIT

Man kann zusammenfassend unterscheiden:

- *abstraktes* Objekt (= Extension eines Zeichens oder Wortes)
  Individuator: bezeichnet das Objekt mit seinen *wesentlichen* Eigenschaften
  Prädikator: bezeichnet die Objekte mit den *wesentlichen* Eigenschaften der *Klasse*
- *konkretes* Objekt:
  das ist das reale Objekt mit *allen* seinen (wesentlichen und zufälligen) Eigenschaften

Graphisch könnte man das folgendermaßen darstellen:

Wort/Zeichen
↓
abstraktes Objekt
(Extension)
↓
konkretes
Objekt

Ggf. könnte man auch den Terminus der ‚Extension' differenzieren:

– *abstrakte* Extension *abstraktes* Objekt

– *konkrete* Extension *konkretes* Objekt

Aber die *primäre*, die eigentliche Extension ist eben die *abstrakte*, anders, als es meistens dargestellt wird.

0-3-2-5 ZUORDNUNGS-PROBLEM

Hier einige Überlegungen für Spezialisten: Ich habe im vorausgegangenen Text erläutert (nur mit einem anderen Beispiel):

1. Stufe: Extension(‚Quadrat') = λx(quadratisch x)

alle x, für die gilt: sie haben die Eigenschaft „quadratisch"

2. Stufe: Extension^2(‚Quadrat') = λx(rechteckig x $\wedge$ gleichseitig x)

alle x, für die gilt: sie haben die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig"

Dabei sollen die genannten Eigenschaften dem Objekt *wesentlich* zukommen.

Die 2. Stufe ist vor allem von Interesse. (Man könnte diskutieren, ob man zur *vollständigen* Bestimmung eines *Quadrats* auch andere Begriffe benötigt, aber das ist hier irrelevant).

Nun ergeben sich folgende zwei Probleme:

• Erstens, *kommen* die Eigenschaften dem *inhaltlichen* Objekt *zu*?

Darf man z. B. sagen, dass einem Quadrat die Eigenschaften„rechteckig" und „gleichseitig" *zukommen* oder es diese Eigenschaften *besitzt* ? Eine solche Redeweise habe ich oben öfters verwendet, z. B. dass ich sagte, Sokrates komme die Eigenschaft „sokratisch" zu.

Aber diese Redeweise bzw. Schreibweise ist nicht wirklich korrekt:

Ein Quadrat *besitzt nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Ein Quadrat *hat nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Und: Einem Quadrat *kommen nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *zu*. Und schon gar nicht gilt: Einem Quadrat *kommen* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *wesentlich zu*.

Denn die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *konstituieren* erst das Objekt Quadrat (bzw. die Klasse der Quadrate). So darf man *korrekt* nur sagen: Ein Quadrat *beinhaltet* (oder *enthält*) die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Diese Eigenschaften sind eben (logisch) *Teil* oder *Bestandteil* vom Quadrat. Und sie sind deshalb *wesentlich*, weil sie das „Wesen" des Quadrates erst begründen.

Trotz der obigen Ausführungen ist ein Satz wie ‚ein Quadrat *besitzt* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig"' nicht wirklich falsch. Aber er ist *redundant*, er sagt nichts Neues über das Quadrat aus. Denn ein Quadrat gibt es eben nur durch die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig".

In jedem Fall gilt: Einem Objekt können *synthetische* Eigenschaften *zukommen*, das sind Eigenschaften, die *nicht in ihm bereits enthalten* sind. Z. B. kann einem Quadrat zukommen, dass es blau ist oder groß bzw. kann es die Eigenschaften „blau" und „groß" besitzen.

• Zweitens, kommen die Eigenschaften dem *formalen* Objekt zu?

Nun könnte man argumentieren, das oben genannte Problem sei kein wirkliches Problem, weil ja in der formalen Logik die Eigenschaften auch nicht dem *inhaltlich* bestimmten Objekt, z. B. dem Quadrat, zugewiesen werden, sondern dem *formalen* Objekt x.

Das zeigt die Formalisierung: Extension(‚Quadrat') = λx(rechteckig x $\wedge$ gleichseitig x)

Aber, die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" kommen offensichtlich auch nicht dem formalen Objekt x zu. Denn ein formales Objekt *besitzt gar keine Eigenschaften*. Anders gesagt, es könnte genauso gut die Eigenschaft „rund", „dreieckig" o. a. besitzen.

Es *kommen* dem formalen Objekt x auch keine Eigenschaften *zu*. Schon gar nicht können einem formalen Objekt *wesentliche* Eigenschaften zukommen.

Formale, unbestimmte Objekte *besitzen* nur formale, *unbestimmte* Eigenschaften, keine inhaltlichen. Aber man kann ihnen (sprachlich) bestimmte inhaltliche Eigenschaften *zusprechen* oder *zuordnen*, jedenfalls informell, bei der Verwendung von Beispielen. Das ist die Methode der Logik. Dabei ist kritisch nach der ontologischen Berechtigung zu fragen, oder ob hier nur ein pragmatisch bzw. technisch begründetes Vorgehen gegeben ist.

0-3-3 Extension versus Intension

0-3-3-1 STUFEN-THEORIEN

Wir haben bei der Intension und Extension 2 Stufen unterschieden. Diese Stufen wurden hier in bestimmter Weise interpretiert. Ich werde aber auch eine *alternative* Theorie vorstellen.

• Parallele Stufen von Intension und Extension

Fassen wir das noch einmal zusammen, am einfachsten am Beispiel ‚Rappe'.

1) Intension
   1. Stufe: Allgemein-Begriff „Rappe" , kurz: E(Rappe)
   2. Stufe: Vereinigungs-Menge der Begriffe/Eigenschaften „Pferd" und „schwarz"
      E(Pferd $\cup$ schwarz)

2) Extension
   1. Stufe: Klasse der Rappen
   2. Stufe: Schnitt-Menge der Klasse der Pferde und der Klasse der schwarzen Objekte
      K(Pferde $\cap$ schwarze Objekte)

Dabei geht es bei der Intension wie der Extension um einen *abstrakten* Ansatz, d. h. es geht nur um die *wesentlichen* Eigenschaften.

Die 2. Stufe ist die wichtigere, erst auf dieser zweiten Stufe wird überzeugend deutlich, warum man die Intension auch als *Sinn* oder *Inhalt* bestimmt. Im Beispiel: Der *Inhalt* des Wortes ‚Rappe' ist eben „schwarzes Pferd" und nicht der Allgemein-Begriff „Rappe".

Nun könnte man gegen diese Darstellung einwenden, dass hier *kein gravierender Unterschied* zwischen Extension und Intension besteht, beide nehmen entscheidend Bezug auf die *wesentlichen Eigenschaften* des Objekts. Beide entsprechen sich genau, auf der 1. Stufe wie auf der 2. Stufe. Warum benötigt man dann überhaupt Extension *und* Intension *beide* ? .

• Alternatives Stufen-Modell

In der Tat gibt es alternative Modelle, welche die Beziehung zwischen Extension und Intension anders definieren. Vor allem, nicht zwischen zwei Stufen unterscheiden bzw. auf eine Stufe verzichten. Das gilt z. B. in der *klassischen* Logik, in der man meistens vom – geistigen – *Begriff* (und nicht vom Wort) ausgeht, und so ergibt sich eine andere Einteilung:

Begriff „Rappe"

1) Intension (Inhalt)
   Verbindung der Begriffe „Pferd" und „schwarz"

2) Extension (Umfang)
   Klasse der Rappen

Hier besteht also ein klarer Unterschied zwischen Extension und Intension, jede hat ihren eigenen Zugang zur Wirklichkeit. Außerdem kommt man zunächst ohne zwei Stufen aus, was natürlich als Vereinfachung erwünscht wäre.

• Diskussion
Aber der 2-stufige Ansatz besitzt den Vorteil einer *parallelen* Darstellung von Extension und Intension. Auch werden Extension und Intension in der *modernen* Logik in erster Linie als Bedeutungen von *Zeichen*, nicht als Begriffs-Bestimmung verstanden.
Und schließlich: Letztlich kommt man nicht einmal mit *zwei* Stufen aus, sondern man kann noch *weitere* Stufen annehmen, die *Kette* fortsetzen, fragen, wie sich ‚Pferd' und ‚schwarz' weiter bestimmen lassen. Dies gehört allerdings nicht mehr zur *direkten* Intension/Extension von ‚Rappe', sondern dann ginge es um die Intension/Extension von ‚Pferd' bzw. ‚schwarz'.

0-3-3-2 SUBJEKTIVE UND OBJEKTIVE THEORIE

Bisher habe ich Extension und Intension als etwas *Objektives* behandelt. Auch wenn ich von *Sprachzeichen* ausging, so wurden die Extension / Intension letztlich doch über die *Objekte* bestimmt. So ergab sich:
– die *Intension* sind die wesentlichen Eigenschaften, die ein Individuum bzw. die Mitglieder einer Klasse objektiv bzw. real bestimmen
– die *Extension* sind das Individuum bzw. die Klassen-Elemente mit samt ihren wesentlichen Eigenschaften

Es gibt aber auch einen alternativen Ansatz, so dass wir folgende Unterscheidung treffen:
(wobei wir zunächst nur die *Intension* betrachten):
• *objektiver* Ansatz (*Ontologie*- Ansatz)
Die Intension sind die wesentlichen Eigenschaften, die ein Individuum bzw. die Mitglieder einer Klasse *objektiv* bestimmen. Dieser Ansatz ist rein *ontologisch*.
• *subjektiver* Ansatz (*Definitions*-Ansatz)
Die Intension sind die wesentlichen Eigenschaften, die wir einem Individuum bzw. den Mitgliedern einer Klasse durch eine *Definition zuschreiben*. D. h. aber, es geht nicht notwendig um die tatsächlich wesentlichen Eigenschaften, sondern um die, die wir *subjektiv* für wesentlich *halten*. Das „wir" meint in erster Linie die *Wissensgemeinschaft*.
Diesen Unterschied können wir formal so kennzeichnen, dass wir bei einer *Definition* das Kürzel ‚df' verwenden, z. B.: Intension^2(‚Rappe') $=_{df}$ E(Pferd) $\cap$ E(schwarz)
Der subjektive Ansatz ist primär *handlungs-theoretisch*, weil eine Definition eine Handlung bzw. Sprachhandlung ist. Trotzdem bleibt auch der subjektive Ansatz insofern *realistisch*, dass es primär um *Eigenschaften von Objekten* geht, nicht um semantische Merkmale von Zeichen oder um psychische Deutungen. (Für die Extension gilt Entsprechendes.)

Man kann (subjektiv) auf *beiden Stufen* von einer *Definition* sprechen. Für die *1. Stufe* von Extension / Intension ist die Unterscheidung subjektiv – objektiv allerdings wenig relevant, weil es sich dabei um *Festsetzungen* handelt. Dass die Intension von ‚Sokrates' der Begriff „Sokrates" ist, beruht auf einer Festlegung, damit ist das *quasi objektiv* und es macht keinen Sinn zu fragen, ob dies real wahr ist oder nur für wahr gehalten wird. Für die 2. Stufe ist es aber m. E. sinnvoller, Intension und Extension über den *subjektiven Ansatz* zu bestimmen als über den *objektiven Ansatz.* Das wird im Folgenden begründet.
Wir haben schon erläutert: Intension und Extension sind *abstrakt*, denn es geht nicht um *alle* Eigenschaften, sondern nur um die *wesentlichen* – denn wir können nie alle Eigenschaften kennen; außerdem wären sonst alle Aussagen über Objekte redundant.
Aber wir können meistens auch *nicht sicher wissen*, welches die *wesentlichen* Eigenschaften der Objekte sind. Wir können das nur vermuten. Daher bietet sich der *subjektive* Ansatz an.

Dabei müssen wir aber eine weitere *Einschränkung* machen: Wir können *nicht für alle* Objekte die vermuteten wesentlichen Eigenschaften angeben, es sind nicht alle Objekte definiert.

Dies lässt sich leicht erläutern: Angenommen, wir nehmen einen beliebigen Menschen, der nur in seiner Familie, in seinem Freundeskreis und an seinem Arbeitsplatz bekannt ist, sonst aber nicht, d. h. er ist in der Gesellschaft unbekannt. Nennen wir ihn ‚Hans Müller'. Sicherlich besitzt dieser Hans *wesentliche Eigenschaften*, die ihn, die seine Identität bestimmen. Aber der Hans ist nicht von der Wissensgemeinschaft definiert. Wenn man im *Lexikon* nachschlägt, findet man nichts über ihn. Anders dagegen, wenn wir über den *berühmten* Philosophen Sokrates nachlesen, über den finden wir genaue Einträge. Wir können sagen, Sokrates ist als Person *öffentlich definiert*. Vereinfacht gesagt: Objekte, die wichtig und bekannt sind in einer Gemeinschaft, sind definiert, die anderen nicht. Die meisten Objekte (z. B. Steine am Wegesrand) sind nicht öffentlich, nicht gesellschaftlich definiert.

0-3-3-3 SUBJEKTIVER ANSATZ

Wir unterscheiden dabei zwischen *subjektiver Intension* und *subjektiver Extension*.

1) Subjektive Intension

Verwenden wir hier ein klassisches Beispiel des Logikers Gottlob Frege: ‚Abendstern' und ‚Morgenstern'. Nach Frege gilt:

– Die Intension der Wörter ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' („Sinn" nach Frege) soll *unterschiedlich* sein.

– Die Extension („Bedeutung" nach Frege) dieser Zeichen soll aber *gleich* sein, in beiden Fällen handelt es sich um die Venus; zur Extension kommen wir im nächsten Punkt.

Zunächst ist es fraglich, ob die Intension der beiden Wörter sich wirklich unterscheidet, denn es geht um die *wesentlichen* Eigenschaften von Abendstern und Morgenstern; auch wenn wir diese Eigenschaften nicht ganz sicher angeben können, nach der in den vorigen punkten dargestellten *objektiven*, *ontologischen* Theorie müssen sie gleich sein.

Gehen wir aber von der *subjektiven* Theorie aus, kommen wir zu einem anderen Ergebnis.

Präzisieren wir die reale Intension; dabei können wir wieder *2 Stufen* unterscheiden:

> *1*. Stufe: die Intension des Wortes ‚Morgenstern' ist der *Begriff* "Morgenstern",
> die Intension des Wortes ‚Abendstern' ist der *Begriff* "Abendstern".
> Damit ist aber noch nichts über die weiteren Eigenschaften ausgesagt. Dies geschieht in einer 2. Stufe.
> *2*. Stufe: *Definition* des Begriffs. Diese könnte hier lauten:
> „Morgenstern = der in der Morgendämmerung noch sichtbare Planet Venus, wenn er westlich von der Sonne steht"; im Gegensatz dazu:
> „Abendstern = der in der Abenddämmerung schon sichtbare Planet Venus".

Wir haben hier also *unterschiedliche Intensionen*. Das lässt sich folgendermaßen erklären: Die Intension bezieht sich primär auf die Eigenschaften, mit denen wir etwa ein Objekt *erfassen*, die wir bei ihm für wesentlich *halten*. Und die unterscheiden sich in der Tat bei Abendstern und Morgenstern. (Bzw. unterschieden sie sich früher, aber das ist ein anderes Problem).

Damit haben wir allerdings eine Veränderung der bisherigen Bestimmung von Intension vorgenommen. Ich spreche von *subjektiver* Intension. Und die ist in der Tat die primäre. Sie umfasst die als wesentlich *zugeschriebenen* Eigenschaften von Objekten.

Halten wir fest: Ich bestimme die Intension als *subjektiv*, sie erfasst die als wesentlich *zugeschriebenen* Eigenschaften von Objekten. Allenfalls könnte man unterscheiden:

> *primäre* Intension = *subjektive* Intension = für wesentlich gehaltene Eigenschaften
> *sekundäre* Intension = *objektive* Intension = die wesentlichen Eigenschaften

2) Subjektive Extension

Die – *real-subjektive* – Theorie der Intension betrifft auch die *Extension*. Insofern müssen wir die oben gemachten Aussagen zur Extension präzisieren. Wir erfassen in der Extension Objekte *nicht* mit ihren tatsächlichen, *objektiv* wesentlichen Eigenschaften, sondern mit den Eigenschaften, die wir ihnen *subjektiv* als wesentlich zuschreiben. Also entsprechend der subjektiven Intension.

Das ist von großer Wichtigkeit, denn wir müssen damit die seit Frege verbreitete These aufgeben, dass zwei Zeichen bei *gleicher Intension* eine *unterschiedliche Extension* besitzen können. Das heißt für das Beispiel von ‚Morgenstern' und ‚Abendstern': sie haben auch nicht dieselbe Extension, denn bei ‚Morgenstern' wird die Venus mit anderen Eigenschaften erfasst als bei ‚Morgenstern'. Nur wenn man von den *objektiven,* realen Eigenschaften ausgeht, besitzen ‚Morgenstern' und ‚Abendstern' dieselbe Extension. Es ist natürlich schwierig, eine so etablierte Unterscheidung wie die von Frege aufzugeben; eventuell könnte man sie retten, indem man – entsprechend wie bei der Intension – unterscheidet zwischen:

- *subjektive* Extension: Die *subjektive Extension* umfasst ein Objekt gemäß den ihm *als wesentlich zugeschriebenen* Eigenschaften – so unterscheiden sich ‚Morgenstern' und ‚Abendstern', sie haben eine unterschiedliche Extension.
- *objektive* Extension: hier wäre weiter zu differenzieren zwischen abstrakter und konkreter Extension (vgl. oben). Die *abstrakte (objektive) Extension* ist das Objekt mit allen seinen *wesentlichen* Eigenschaften. Die *konkrete (objektive) Extension* ist das konkrete, reale Objekt selbst, mit *allen seinen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften.* In beiden Fällen besitzen ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' dieselbe Extension – Freges Theorie wäre gerettet; allerdings, wenn man auch von der objektiven Intension ausgeht, wäre das wieder aufgehoben, denn dann wäre eben auch die Intension von ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' gleich.

Folgende Grafik soll die Hauptunterschiede für das Beispiel „Abendstern – Morgenstern" *vereinfachend* veranschaulichen; dabei erfasse ich in der Intension aber nur *eine* unterscheidende Eigenschaft, die gesamte Intension umfasst natürlich weitere Eigenschaften:

	‚Morgenstern'	*‚Abendstern'*
Intension	in der Morgendämmerung noch sichtbar	in der Abenddämmerung schon sichtbar
	↓	↓
abstrakte Extension	der Himmelskörper, der in Morgendämmerung noch noch sichtbar ist	der Himmelskörper, der in Abenddämmerung schon sichtbar ist
konkrete Extension (reales Objekt)	Venus	

In der *konkreten* Extension stimmen also ‚Morgenstern' und Abendstern' überein, dies ist das *konkrete Objekt*, mit allen seinen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften.

Wir können jetzt die obige, allgemeine Grafik erweitern nzw. Modifizieren:

Wort/Zeichen
↓
abstraktes Objekt (Extension) = Träger + Intension
(Intension = Begriff = die für wesentlich gehaltenen Eigenschaften)
↓
konkretes Objekt = Träger + wesentliche Eigenschaften + kontingente Eigenschaften

0-3-3-4 VERHÄLTNIS VON EXTENSION UND INTENSION

Ich habe eben gezeigt, dass Extension und Intension weitgehend übereinstimmen, dass bei gleicher Intension zweier Zeichen auch deren Extension gleich ist und umgekehrt. Man kann daher fragen: Wozu benötigt man überhaupt den *Doppelansatz* von Extension und Intension? Jedenfalls stellt sich die Frage bei dem hier vorgelegten Modell, wonach gilt:

Extension: Objekt (bzw. Träger) einschließlich der definitorischen Eigenschaften.

Intension: die definitorischen Eigenschaften. Also: *Die Intension ist ein Teil der Extension*.

Die Gründe, dennoch an dieser Unterscheidung festzuhalten, sind vielfältig und können hier nicht im Einzelnen dargelegt werden. Beide Ansätze haben jedoch ihre Vor- und Nachteile.

Die Intension bestimmt das Objekt *wesentlich*. Z. B. „Ein Mensch ist definiert durch die Eigenschaften *Sinnenwesen* und *vernünftig"*. Die Extension braucht man, um *nicht wesentliche* Eigenschaften anzugeben, die etwa *nur für einen Teil* der Menschen gelten. Z. B. „viele Menschen sind Weintrinker".

Anders gesagt, die Intension bezieht sich nur auf *analytische*, definitorische Eigenschaften; die Extension erfasst analytische, aber auch *synthetische* Eigenschaften.

Wichtig ist folgendes Verhältnis zwischen Extension und Intension: Je *größer* die Extension, desto *kleiner* (i. allg.) die Intension – und umgekehrt. Z. B ist die Extension von ‚Blume' größer als die von ‚Rose': denn die Klasse der Rosen ist *Teilmenge* der Klasse der Blumen.

Andererseits ist die Intension von ‚Blume' kleiner als die von ‚Rose'. Dabei stellt sich man sich die Intension (vereinfacht) als eine *Menge von Eigenschaften* vor. Die Intension von ‚Rose' umfasst alle Eigenschaften von ‚Blume', aber zusätzlich die, welche eine Rose auszeichnen. Die Rose ist definiert als eine Blume, die besondere zusätzliche Eigenschaften besitzt. Somit sind die Eigenschaften von ‚Blume' eine Teilmenge der Eigenschaften von ‚Rose'.

Man kann ein Wort vor allem in zweierlei Weise bestimmen: am Beispiel von ‚Mensch' der traditionell als Sinnenwesen (animal) und Vernunftwesen (rationale) definiert ist; die folgenden Einteilungen gehen von der *Extension* aus.

1) *Schnitt-Menge* der *Ober-Klassen* (das ist zentral für die Definition)
   1. extensional: K(Mensch) = K(Sinnenwesen) $\cap$ K(Vernunftwesen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Sinnenwesen) $\cup$ E(Vernunftwesen)

2) *Vereinigungs-Menge* von (wesentlichen) Unter-Klassen
   1. extensional: K(Mensch) = K(Männer) $\cup$ K(Frauen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Männer) $\cap$ E(Frauen)

3) Kombination (manchmal wird folgendermaßen kombiniert, nur über Vereinigung)
   1. extensional: K(Mensch) = K(Männer) $\cup$ K(Frauen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Sinnenwesen) $\cup$ E(Vernunftwesen)

K = Klasse (der Objekte), E = Eigenschaft (ebenfalls als Menge aufgefasst)

Man sieht, dass sich die Mengen-Verknüpfungen extensional und intensional also immer gegensätzlich verhalten (außer bei der Kombination):

Extensional: Schnitt-Menge	Intensional: Vereinigungs-Menge
Extensional: Vereinigungs-Menge	intensional: Schnitt-Menge

0-3-3-5 NOMINAL-DEFINITION UND REAL-DEFINITION

Wie beschrieben, werden die (subjektive) *Intension* und *Extension* primär durch eine *Definition* bestimmt. Das gilt sowohl für die 1. wie für die 2. Stufe. Im strengen Sinn von Definition spricht man aber erst auf der 2. Stufe, also wenn man z. B. ‚Mensch' als „vernünftiges Sinnenwesen" definiert.

Ein wichtiger Unterschied, auf den bisher noch nicht eingegangen wurde, ist der zwischen *Real-Definition* und *Nominal-Definition*; dieser Unterschied soll im Folgenden erläutet werden, aber nur knapp, weil dieses Thema eher zur Sprachphilosophie gehört.

1) *Real-Definition*:
Sie ist eine *Wesens-Bestimmung*, sie gibt die *wesentlichen Eigenschaften* eines realen Objektes bzw. einer komplexen Eigenschaft an.

Diese Definition wird von der *Wissensgemeinschaft* (bzw. Wissenschaftlergemeinschaft) vorgenommen. Z. B.: Ein Lebewesen (bzw. der Begriff „Lebewesen") ist bestimmt durch die folgenden *essentiellen* Eigenschaften: Stoffwechsel, Informationsverarbeitung, Fortpflanzung, Immunabwehr, Homöostase u. a.

Real-Definitionen findet man vorrangig im Lexikon, verstanden als *Sach-Lexikon*. Wie gesagt, ich gehe davon aus, dass die Real-Definition eigentlich nur die Eigenschaften angibt, die wir *subjektiv* für wesentlich *halten*.

Die klassische Philosophie bestimmte den Menschen wie beschrieben als „vernünftiges Sinnenwesen" (*animal rationale*), gemäß der traditionellen Definitionslehre, und zwar wie folgt:

Ein *Artbegriff (species)*	hier: Mensch	wird definiert durch
– die *nächst höhere Gattung (genus proximum)*	hier: Sinnenwesen und	
– *Art-Differenz* (differentia specifica)	hier: vernünftig	

Realistischer wäre es wohl, 'rational' mit „vernunftbegabt" zu übersetzen.

Das heißt, es werden immer nur *2 (zwei)* Begriffe zur Definition herangezogen. Diese sind nicht gleichberechtigt, sondern der Gattungsbegriff ist *übergeordnet*: im Beispiel ist das ‚vernünftig' untergeordnet, denn es wird dem ‚Sinnenwesen' zugeordnet. Indem man immer höhere, abstraktere Gattungs-Begriffe angibt, erhält man so eine Hierarchie, die als Baum des Porphyrius berühmt ist.

2) *Nominal-Definition*
Sie ist eine *Bedeutungs-Bestimmung*, sie gibt die *Bedeutung* eines Zeichens an (bzw. sie gibt die Extension oder Intension eines Zeichens an).

Nominal-Definitionen findet man vorrangig im *Wörter-Buch*.
Obwohl man grundsätzlich sowohl für ‚Mensch' wie für ‚Rappe' eine Real-Definition und eine Nominal-Definition angeben kann, ergibt sich doch ein gewisser Unterschied:
– ‚Der Mensch ist ein vernünftiges Sinnenwesen' – das würde man eher als *Real*-Definition fassen, die eine Aussage über das *Wesen* des Menschen macht.
– ‚Der Rappe ist ein schwarzes Pferd' – das ist eher als *Nominal*-Definition zu fassen, bei der weniger eine Aussage über das Wesen das Rappen gemacht wird, sondern umgekehrt die beiden Wörter ‚Pferd' und ‚schwarz' zu dem Wort ‚Rappe' zusammengefasst werden.

Bisher wurden beide Definitionen verwandt. Da ich primär von der Extension und Intension von *Sprachzeichen* ausgegangen bin, erfolgte zuerst, auf der *1. Stufe*, eine Nominal-Definition. Z. B. die Intension des Wortes ‚Rappe' ist die Eigenschaft „Rappe". Auf der *2. Stufe*, auf der das Zeichen ‚Rappe' oder aber das Objekt *Rappe* durch die Eigenschafts-Verknüpfung „Pferd" und „schwarz" bestimmt wurde, erfolgte primär eine Real-Definition.

Man stellt die Nominal-Definition gerne der Real-Definition gegenüber, aber eigentlich gibt es *verschiedene* Nominal-Definitionen zu unterscheiden; um nur die wichtigsten zu nennen:

- Quasi-Real-Definition

Mit dem Wort ‚Rappe' bezeichnet man ein Wesen (Objekt), das als *wesentliche* Eigenschaften „Pferd" und „schwarz" besitzt.

- Angabe des Sprachgebrauchs

Wir *nennen* ein Objekt ‚Rappe', das die Eigenschaften „Pferd" und „schwarz" besitzt.

- sprach-interne Bestimmung

syntaktisch: das Wort ‚Rappe' ist durch folgende *Wörter* definiert: ‚Pferd' und ‚schwarz'.
semantisch: ‚Rappe' ist definiert durch die *semantischen Merkmale* „Pferd" und „schwarz". Hier besteht allerdings die Notwendigkeit, doch noch einen *Bezug zur Realität* herzustellen, sonst bleibt die Nominal-Definition ein *geschlossenes Sprachsystem*.

- Benennung

Z. B.: Die Intension von ‚Rappe' ist per definitionem der Begriff „Rappe". Oder die Extension von ‚Rappe' ist per definitionem die Klasse der Rappen. Diese lassen sich als *Benennungen* umformulieren: Hiermit nenne ich die Intension von ‚Rappe': Begriff „Rappe".

Es besteht ein sehr kompliziertes Wechselverhältnis, eine *Dialektik* zwischen Nominal- und Real-Definition. Allerdings hat die Nominal-Definition Vorrang: Denn beim Definieren sind wir eben immer auf *Sprache* angewiesen.

Aber durch eine Definition werden *nicht alle* Eigenschaften erfasst. Erst eine *Beschreibung* oder *Theorie* zielt auf Erfassung *aller* Eigenschaften, kann allerdings auch nicht vollständig sein. Es ist also doch sehr nahliegend zu bestimmen, dass eine Definition nur die *wesentlichen* Eigenschaften erfassen soll. Wenn man den Begriff „wesentlich" kritisiert, welche Eigenschaften soll denn sonst die Definition erfassen, wenn nicht die essentiellen?

Abschließend zum Verhältnis von Extension und Intension zwei Übersichten:

- *Übersicht:* Objekte – und Extension versus Intension
- *Übersicht:* Arten von Extension und Intension

- *Übersicht:* Objekte – und Extension versus Intension

Formales Objekt	
$\Downarrow$ + essentielle Eigenschaften	Intension eines Zeichens (Bedeutungs-Definition)
Abstraktes Objekt	Extension eines Zeichens (Bezeichnungs-Definition)
$\Downarrow$ + kontingente Eigenschaften	Forschung, Untersuchung
Konkretes Objekt	Theorie, Beschreibung

Erläuterung: Ein *formales Objekt* (x) wird durch Hinzufügung der *wesentlichen Eigenschaften* zu einem *abstrakten Objekt*. Die *wesentlichen Eigenschaften* sind die (reale) *Intension* des Zeichens, das abstrakte Objekt ist die Extension des Zeichens. Beide beruhen auf *Definition*. Die Feststellung der *kontingenten, synthetischen Eigenschaften* des Objekts ist vor allem Aufgabe der *Forschung*. In einer wissenschaftlichen Theorie bzw. Gesamt-Beschreibung wird dann das *konkrete Objekt* mit essentiellen und kontingenten Eigenschaften dargestellt.

Übersicht: Arten von Extension und Intension

1) Intension	
1. subjektiv (primär)	die für wesentlich gehaltenen Eigenschaften eines Objekts (als Teil einer Klasse)
2. objektiv (sekundär)	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts (als Teil einer Klasse)
2) Extension	
1. subjektiv (primär)	das Objekt mit seinen für wesentlich gehaltenen Eigenschaften (als Teil einer Klasse)
2. objektiv (sekundär)	
– abstrakt	das Objekt mit allen seinen wesentlichen Eigenschaften
– konkret	das Objekt mit allen seinen – wesentlichen und unwesentlichen – Eigenschaften

Anmerkungen (wie im Text erläutert):
– Die Intension ist immer *abstrakt*, d. h. sie erfasst immer nur das Allgemeine; insofern gibt es keine konkrete Intension in der Tabelle.
– Die *subjektive* Intension bzw. Extension ist primär gegenüber der *objektiven*.
– Innerhalb der objektiven Extension gilt aber: Die *abstrakte* Extension ist primär gegenüber der *konkreten*.

0-3-4 Extensionaler und intensionaler Ansatz

0-3-4-1 SEMANTISCHE UND SYNTAKTISCHE ANALYSE

Man kann bei Extension und Intension zwei Aspekte unterscheiden:
1. Extension und Intension als *Bedeutung* (*semantischer* Aspekt)
2. Extension und Intension als *Sprachformen* (*syntaktischer* Aspekt)

Bisher habe ich mich vorwiegend mit dem *semantischen* (bzw. ontologischen) Aspekt beschäftigt, also z. B.: „die Extension eines Sprachzeichens ist ein Objekt".

Im Folgenden wird es primär um die *syntaktische* Seite gehen, also um die Unterscheidung von *extensionaler* und *intensionaler Sprache*, z. B. „das *Adjektiv* ist eine *intensionale* Zeichenkategorie".

Es wird sich im Einzelnen zeigen, dass eine Sprache grundsätzlich folgende Eigenschaften besitzen kann:

extensional bzw. intensional *neutral*
extensional bzw. intensional *festgelegt*

Hier ergeben sich wichtige Unterschiede zwischen der *normalen Sprache* und der *Logik-Sprache*.

0-3-4-2 NORMALE SPRACHE

Untersuchen wir zunächst kurz die normale – deutsche – Sprache, inwieweit sie extensional oder intensional ausgerichtet ist.

Bei den deskriptiven *Zeichen* (Wörtern) wird überwiegend extensional und intensional unterschieden, vor allem durch

Substantive: Objekt-Wörter (extensionale Zeichen), z. B. ‚Mensch'
Adjektive: Eigenschafts-Wörter (intensionale Zeichen), z. B. ‚rot'

Wichtig ist dabei:
Auch ein *extensionales* Zeichen besitzt eine *Intension*, aber es zielt *primär* auf die Extension.

z. B. ‚Mensch' (extensionales Zeichen)
primäre = extensionale Bedeutung: *Klasse* der Menschen
sekundäre = intensionale Bedeutung: *Eigenschaft* „menschlich"

Allerdings kann auch eine Eigenschaft *substantivisch* ausgedrückt werden, z. B. ‚Menschsein' bzw. ein Adjektiv *substantiviert* werden, z. B. ‚Menschlichkeit'.

Entsprechend: Auch ein *intensionales* Zeichen besitzt eine *Extension*, aber es zielt *primär* auf die Intension.

z. B. ‚rot' (intensionales Zeichen)
primäre = intensionale Bedeutung: *Eigenschaft* „rot"
sekundäre = extensionale Bedeutung: *Klasse* der roten Objekte

Bei *Sätzen* sieht es ähnlich aus. Auch hier trennt die *normale Sprache* überwiegend zwischen extensional und intensional; die folgenden Bedeutungen könnte man auch anders bestimmen:

z. B. ‚Sokrates ist ein Mensch' (extensionaler Satz)
extensionale Bedeutung: „das Objekt Sokrates ist Element der Klasse der Menschen"
intensionale Bedeutung: „der Begriff Mensch ist Teil des Begriffs Sokrates"

z. B. ‚rot sein heißt farbig sein' (intensionaler Satz)
intensionale Bedeutung: „der Begriff farbig ist Teil des Begriffs rot"
extensionale Bedeutung:„rote Objekte sind Elemente der Klasse der farbigen Objekte"

0-3-4-3 FORMALE SPRACHE

Anders als man vielleicht erwarten könnte, scheint die formale Sprache weniger klar in der Unterscheidung von extensional und intensional. Denn *Zeichen* wie die *Prädikatoren* ‚F' und ‚G' stehen gleichermaßen für *Objekte* wie „Menschen" oder *Eigenschaften* wie „weise". Das liegt aber daran, dass die formale Sprache von *formalen Objekten* x, y ausgeht, denen dann Eigenschaften zugeordnet werden, wobei „Mensch" und „weise" gleichermaßen als Eigenschaften gedeutet werden (vgl. oben). So gesehen findet doch eine klare Unterscheidung statt.

Außerdem kann man durch Hinzufügungen (wie ‚K' und ‚E') die Variablen präzisieren, z. B. extensional ‚K(F)' für ‚die Klasse F' und intensional ‚E(F)' für ‚die Eigenschaft F'.

In einem *Satz* wird zusätzlich oft durch den verwendeten *Relator* ausgedrückt, ob es sich um eine extensionale oder intensionale Darstellung handelt.

0-3-4-4 DREI ANSÄTZE

Wir können nun *3 Ansätze* unterscheiden (Ansätze, die sich in erster Linie *syntaktisch* definieren, aber entsprechend semantische Auswirkungen haben):

- *extensionaler* Ansatz: bezieht sich primär auf *Objekte*, Individuen und Klassen
- *intensionaler* Ansatz: bezieht sich primär auf *Eigenschaften*
- *extensional-intensional gemischter* Ansatz: bezieht sich auf *Objekte und* auf *Eigenschaften*

Zur Unterscheidung dieser Ansätze folgende vereinfachte Vergleiche mit Beispielen

Übersicht für *einfache*, atomare Sätze:
• extensional: $x_1 \in F$
„Sokrates ist ein Element der Klasse der Menschen“.
• extensional – intensional: Fx_1
„Sokrates besitzt die Eigenschaft, Mensch zu sein“.
Hier wird einem Objekt x_1 (extensional) eine Eigenschaft F (intensional) zugeordnet. Man kann das auch als „*gemäßigt intensional*“ fassen.
• intensional: $E(F) \subset E(x_1)$
„Der Allgemein-Begriff Mensch ist im Individual-Begriff Sokrates enthalten“.
(*Intensionale* Beziehungen sind *analytisch*, meist *per Definition*, daher müsste man eigentlich $E(F) \subset_{df} E(x_1)$ schreiben.)

Übersicht für *komplexe*, molekulare Sätze (es wären auch andere Formulierungen möglich):
• extensional: $x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G$
„Wenn Sokrates ein Element der Klasse der Menschen ist, dann ist er auch ein Element der Klasse der Erdbewohner“.
• extensional – intensional: $Fx_1 \rightarrow Gx_1$
“Wenn Sokrates die Eigenschaft Mensch zukommt, dann kommt ihm auch die Eigenschaft Erdbewohner zu“.
• intensional: $E(F) \subset E(x_1) \rightarrow E(G) \subset E(x_1)$
„Wenn der Allgemein-Begriff Mensch im Individual-Begriff Sokrates enthalten ist, dann ist auch der Allgemein-Begriff Lebewesen im Individual-Begriff Sokrates enthalten“.
(Streng genommen müsste auch hier der Definitions-Index $_{df}$ verwendet werden.)

0-3-4-5 FAZIT

• intensionaler Ansatz
Die *rein intensionale* Betrachtung wirft verschiedene Probleme auf. Ein solcher Ansatz ist im Grunde nur sinnvoll bei definitorisch-*analytischen* Beziehungen. Z. B.: „Der Begriff der Blume ist im Begriff der Rose enthalten“. Dagegen ist sie bei *synthetischen* Aussagen wenig aussagekräftig oder sogar falsch. Z. B. der Satz: ‚Peter ist Philosoph’. Hier kann man nicht sagen: ‚Der Begriff *Peter* ist im Begriff *Philosoph* enthalten’. Und ebenso wenig: ‚Der Begriff *Philosoph* ist im Begriff *Peter* enthalten’. Man kann eben nur feststellen – die Begriffe *Peter* und *Philosoph* sind *nicht* ineinander enthalten, und das ist keine sehr gehaltvolle Information (würde man Sokrates anstelle von Peter nehmen, käme man eventuell zu einer anderen Beurteilung).

• extensionaler Ansatz
Die *rein extensionale* Betrachtung führt im Grunde zu einem Zirkel. Angenommen man nimmt wieder die Aussage „Peter ist Philosoph“. Wenn man fragt, was bedeutet das, wäre extensional zunächst die Antwort: „Er gehört zur Klasse der Philosophen“. Dies könnte man aber auch übersetzen in: „Peter gehört zur Klasse x_1, x_2, ... , x_n“, wobei dies eine Auflistung aller Philosophen sein soll. Die Antwort wäre also z. B.: „Peter gehört zur Klasse Sokrates, Platon, Aristoteles, Anaximander , ... , Habermas“. Dies wäre aber keine wirkliche Erklärung.

• gemischt extensional-intensionaler Ansatz
Daher ist die *gemischt extensional-intensionale* Betrachtung letztlich überlegen. Hier würde man z. B. erklären: „Peter ist Philosoph“ bedeutet, er besitzt die *Eigenschaften* Weisheit, Besonnenheit, Vernunft (im Einzelnen wäre natürlich zu diskutieren, welche Eigenschaften einen Philosophen ausmachen).

Nach den obigen Ausführungen kann man folgende *extensionale* und *intensionale Komponenten* der Logik und ihre *Symbole* unterscheiden (ich verzichte auf Anführungszeichen):

Extensionen

1. Objekte
   – unspezifiziert: X, Y
   – spezifiziert
   - Individuen: x, y
   - Mengen: M, N
   - Klassen: F, G bzw. K(F), K(G)

   – Verknüpfungen: z. B. $M \cup N$, $M \cap N$

2. Relationen zwischen Objekten
   – unstrukturiert: X, Y
   konkret z. B. Aussagen: A, B
   (hier sind Relationen als ganze erfasst, ohne ihre Struktur)
   – strukturiert
   - *atomare* Relationen zwischen X und Y: X R Y
     werden aus Objekt-Zeichen und Relatoren formalisiert
     z. B. $x \in F$ (bzw. $X \in Y$)
   - *molekulare* Relationen: $(X_1 R_1 Y_1) R (X_n R_n Y_n)$
     z. B. $x \in F \rightarrow y \in G$ (bzw. $X_1 \in Y_1 \rightarrow X_2 \in Y_2$)

Intensionen (Eigenschaften bzw. Begriffe)

1. Objekt-Eigenschaften: E(X), E(Y)
   - Individuelle Eigenschaften: E(x), E(y)
   - Mengen-Eigenschaften: E(M), E(N)
   - Klassen-Eigenschaften: E(F), E(G)

2. Relationen zwischen Eigenschaften
   (entsprechend der extensionalen Darstellung)

Generelle Komponenten (Extensionen oder Intensionen)

- unstrukturierte: X, Y
- beliebige: Φ (Phi), Ψ (Psi), Ω (Omega)

Erläuterungen:

• X und Y können für *unstrukturierte Objekte* (x, M, F usw.), aber auch für *unstrukturierte Relationen* A, B stehen.

• Die gemeinsame Bezeichnung von *Objekten* (wie x) und einer Untergruppe von *Relationen* (A, B) durch ‚X', ‚Y' usw. ist aus systematischen Gründen etwas unbefriedigend, aber (derzeit) doch die beste Lösung.

• *Strukturierte Relationen* wie z. B. $x \in F$ oder $A \wedge B$ darf man aber nicht unter X bzw. Y fassen, denn X und Y haben einen definierten *Wahrheitswerteverlauf*, der für *strukturierte* Relationen normalerweise nicht gilt.

• Ebenso dürfen *strukturierte Objekte* (Verknüpfungen) nicht einfach mit X und Y dargestellt werden.
• *Generelle Komponenten* wie Φ (Phi), Ψ (Psi), Ω (Omega). Φ, Ψ können (anders als X, Y) *strukturierte* Relationen sein, und zwar *synthetische* wie $X \rightarrow Y$ oder *analytische* wie $X \Rightarrow Y$.

0-3-5 Extension und Intension von Sätzen

0-3-5-1 EXTENSIONALE UND INTENSIONALE DEFINITION

Ich habe im bisherigen Text vor allem die Extension und Intension von *Zeichen* (Wörtern) dargestellt. Dabei ergab sich:

- Extension von Zeichen: Objekte (Individuen, Klassen)
- Intension von Zeichen: (wesentliche) Eigenschaften / Begriffe

Im Folgenden geht es vor allem um die Extension und Intension von *Sätzen*.
Allgemein habe ich schon bestimmt:

- die Extension eines Satzes ist ein *Sachverhalt* (Relation zwischen Objekten)
  genauer:
  die Extension eines *Atom*-Satzes ist ein *Sachverhalt*
  die Extension eines *Molekül*-Satzes ist eine Relation zwischen *Sachverhalten*
- die Intension eines Satzes ist ein *„Begriffsverhalt“* (Relation zwischen Begriffen)
  genauer:
  die Intension eines *Atom*-Satzes ist ein *Begriffsverhalt*
  die Intension eines *Molekül*-Satzes ist eine Relation zwischen *Begriffsverhalten*

Allgemeiner kann man festlegen: Sätze bezeichnen *Relationen zwischen Entitäten*.
Die Frage ist: Unterscheiden sich Extension und Intension auch über die *Relation*? Geht es z. B. logisch um eine andere Relation zwischen Objekten als zwischen Eigenschaften? Ich habe dieses Problem in dem Buch „Integrale Logik“ ausführlich analysiert: Das Ergebnis ist:
Hier besteht kein wesentlicher Unterschied: Man kann Extension und Intension beide insbesondere durch folgende Relationen bestimmen:
• *Mengen-Relationen* (wie die Teilmengen-Relation), da sich nämlich auch Eigenschaften als Mengen auffassen – dies betrifft vor allem *Atom-Sätze*
• *Funktionale Relationen* (wie die Implikation) – dies betrifft vor allem *Molekül-Sätze.*

0-3-5-2 EXTENSION EINES SATZES

Die Extension eines Satzes ist ein *Sachverhalt*. Das ist die klassische Definition, die ich aber weiterhin für die beste halte.
Beginnen wir *aussagen-logisch*: Die Extension des Satzes ‚A' ist der Sachverhalt A.
Hier kann man im Grunde keine *normal-sprachliche* Entsprechung bzw. kein Beispiel angegeben. Denn typisch für die Aussagen-Logik ist gerade, dass ihre Sätze *unstrukturiert* sind.
Interessanter wird es daher erst bei *prädikaten-logischen* Sätzen: Ich werde hier vereinfachend folgende Satztypen unterscheiden:

1) Individual-Satz
Zunächst könnte man z. B. bestimmen: Die Extension des Satzes ‚Sokrates ist Philosoph' ist der Sachverhalt: Sokrates ist Philosoph.

Man sollte die Extension aber bei einer logischen Analyse auf die *logisch-semantische* Tiefen-Struktur beziehen (vgl. 0-1-5-3). Dann lautet die Extension für den obigen Satz:
Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen.
Entsprechend ist dann die Extension des *formalen* Satzes ‚$x_i \in F$' der Sachverhalt $x_i \in F$.

2) Klassen-Satz
– *normal-sprachlicher* Satz: 'Alle Philosophen sind Erdbewohner'.
Extension ist der Sachverhalt:
Die Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Klasse der Erdbewohner.
(Das ist eine *klassen*-logische Deutung, man könnte auch *quantoren*-logisch o.a. analysieren.)
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subset G$'
Extension ist der Sachverhalt: $F \subset G$ bzw.: Die Klasse F ist eine Teilmenge der Klasse G.
Man spricht bei Sätzen wie 'Alle Philosophen sind Erdbewohner' von Atom-Sätzen: Ein *Atom-Satz* (oder Atomar-Satz oder atomarer Satz) ist ein *einfacher Satz*, der keine weiteren Sätze bzw. Relationen enthält. Allerdings ist hier zu differenzieren: So ist der Satz „Alle Menschen sind sterblich" *normal-sprachlich* ein Atomar-Satz, *formal-sprachlich* (quantorenlogisch formalisiert) dagegen ein Molekular-Satz der Struktur: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

3) Molekular-Satz
Ein *Molekül-Satz* (Molekular-Satz oder molekularer Satz) ist aus zwei oder mehr Sätzen zusammengesetzt bzw. enthält zwei oder mehr Relationen. Die sind *verknüpft*. Als Verknüpfung dienen *normal-sprachlich* Bindewörter (Konjunktionen) wie ‚wenn – dann', ‚und', ‚oder' und andere. *Logisch* werden überwiegend aussagen-logische *Relatoren* verwendet, also beispielsweise $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$.
– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn Sokrates philosophiert, dann ist er ein Mensch'.
Extension ist der *Sachverhalt*: Wenn Sokrates Element der Klasse der Philosophierenden ist, dann ist er Element der Klasse der Menschen.
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$x_i \in F \rightarrow x_i \in G$'. Extension: der Sachverhalt: $x_i \in F \rightarrow x_i \in G$

4) Analytischer Satz
Wir haben bisher *synthetische* Beispiel-Sätze verwendet, man kann sie allerdings auch als *material-analytisch*, d. h. definitorisch deuten (zur genauen Bestimmung von synthetischen und analytischen Sätzen vgl. 0-5). Bei streng *analytischen* Sätzen ergibt sich Entsprechendes:
– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Alle Menschen sind Menschen'.
Extension ist der *Sachverhalt*: Die Klasse der Menschen ist (unechte) Teilmenge der Klasse der Menschen (bzw. ist gleich der Klasse der Menschen).
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subseteq F$'. Extension: der Sachverhalt: $F \subseteq F$ bzw. $F = F$

Ein Sachverhalt ist eine *Relation zwischen Objekten* (Individuen und Klassen). Diese Relation kann ganz unterschiedlich sein, sie kann auch *außer-logische*, z. B. kausale Elemente enthalten. Die *Logik* erfasst aber nur *logische* Strukturen. Wie ich in 0-3 gezeigt habe, gilt:
die *abstrakte* Extension eines Zeichens / Wortes ist ein *abstraktes* Objekt
die *konkrete* Extension eines Zeichens / Wortes ist ein *konkretes* Objekt
Die *primäre*, die eigentliche Extension eines Zeichens ist dabei die *abstrakte*: Bei ihr wird das Objekt nur mit seinen *wesentlichen* (bzw. für wesentlich gehaltenen) Eigenschaften erfasst.

Das Entsprechende gilt für Sätze:
die *abstrakte* Extension eines Satzes ist ein *abstrakter* Sachverhalt
die *konkrete* Extension eines Satzes ist ein *konkreter* Sachverhalt
Was ist ein *konkreter* Sachverhalt? Z. B. wenn ich den Sachverhalt „Der Mensch ist ein Säugetier" so erfasse, dass dabei *alle* Eigenschaften *jedes* Menschen und *alle* Eigenschaften *je-*

des Säugetiers miteingehen. Es wird sicher sofort deutlich, dass wir einen solchen Sacherverhalt nicht erfassen können. Man kann „Der Mensch ist ein Säugetier“ aber auch als *abstrakten* Sacherverhalt erfassen, dann werden nur die Eigenschaften berücksichtigt, die *allen* Menschen bzw. *allen* Säugetieren *gemeinsam* sind. Der abstrakte Sachverhalt betrifft die nicht die ganze, konkrete Realität, sondern nur das Wesentliche, er *abstrahiert* vom Kontingenten.

So gesehen kann man sagen: Die *primäre* Extension eines Satzes ist die *abstrakte* Extension, die sich auf einen *abstrakten Sachverhalt* bezieht.

0-3-5-3 IST DIE EXTENSION DER WAHRHEITSWERT?

Ich habe oben als *Extension eines Satzes* den von ihm bezeichneten *Sachverhalt* bestimmt.

In der neueren Logik (seit Frege) wird dagegen vielfach behauptet,
die Extension eines Satzes sei sein Wahrheitswert.

D. h. es gibt danach nur zwei *extensionale Bedeutungen* für einen Satz: *wahr* oder *falsch*.
Ich halte diese These für nicht überzeugend; sie hat zwar den Vorteil der *Einfachheit*, man erspart sich die ontologischen Probleme, einen Sachverhalt zu definieren u. ä., allerdings überwiegen die *Nachteile*:

– Es ist recht künstlich, ja *willkürlich*, als Extension eines Satzes seinen Wahrheitswert anzusetzen.
– Es besteht dann kaum mehr eine *Entsprechung* zwischen der Extension eines Wortes (Objekte) und der eines Satzes (Wahrheitswerte).
– Der Begriff des *Wahrheitswertes* ist ebenfalls nicht unproblematisch; man muss im Grunde zunächst den äußerst schwierigen Begriff ‚Wahrheit’ klären.
– Der Begriff des *Sachverhaltes* ist letztlich kaum verzichtbar, auch die neuere Logik greift darauf zurück, etwa in der berühmten Definition der Wahrheit von Alfred Tarski; danach ist ein Satz dann wahr, wenn der Sachverhalt, den er bezeichnet, besteht.
– Vor allem hätten alle wahren bzw. alle falschen Sätze dann *dieselbe* extensionale Bedeutung, wahre (bzw. falsche) Sätze ließen sich extensional gar nicht mehr unterscheiden.

Fazit: Die These, dass die Extension eines Satzes sein *Wahrheitswert* ist, überzeugt nicht; in keinem Fall für einen Satz der normalen Sprache mit konkreter Bedeutung, aber auch für einen formalen Satz wie z. B ‚$x_i \in F$’. Ohnehin lässt sich ja für einen *formalen* Satz mit *Variablen* gar kein fester Wahrheitswert angeben; wie ich aber gezeigt habe, fungieren letztlich auch Konstanten in der formalen Sprache als Variablen.

Ich halte somit daran fest, dass die *Extension eines Satzes* ein *Sachverhalt* ist.

0-3-5-4 INTENSION EINES SATZES

Was ist die Intension eines Satzes? Hierzu gibt es verschiedene Theorien, vor allem:

• Aussage
Intension eines Satzes = die Aussage, die er macht.
Das klingt erst einmal plausibel, ist aber letztlich nichtssagend. Es besagt letztlich nur, dass ein Sachverhalt gegeben ist. Wie soll man eine Aussage semantisch von einem Sachverhalt unterscheiden (vor allem bei einer formalen Theorie)?

Eine Aussage ist im Grunde eine zusätzliche Funktion, die besagt, dass etwas wahr ist. Sie hat weniger einen semantischen Status, als vielmehr einen *pragmatischen*, nämlich den der (Wahrheits-)*Behauptung*, ähnlich wie *Frage*, *Auforderung* u. ä. Da wir aber die Intension als eine *semantische* Komponente verstehen, können wir dir nicht pragmatisch definieren.

• Wahrheitswerte
Intension eines Satzes = sein Wahrheitswert in allen möglichen Welten.
Das ist eine interessante These, die ich in 0-3-5-5 diskutieren werde.

• Begriffs-Relation
Intension eines Satzes = eine Relation zwischen Begriffen („Begriffsverhalt“) bzw. zwischen Begriffsverhalten. Diese Theorie werde ich vertreten, sie passt auch am besten zur Bestimmung der Intension von *Wörtern*, hat allerdings ihre Schwierigkeiten.

Zuweilen bezieht man den Terminus ‚Intension’ nicht generell auf den Satz, sondern auf *bestimmte* Sätze bzw. deren Analyse. Es heißt dann, das z. B. *Glaubens-Sätze* (‚x glaubt, dass F zutrifft’) nicht *extensional*, sondern nur *intensional* zu verstehen und zu analysieren sind. Damit meint man meistens, dass diese Sätze *nicht wahrheitswert-funktional* sind. M. E. ist dieses Kriterium aber wenig geeignet, die Intension eines Satzes zu definieren.

Wesentlich ist: Die Intension richtet sich nur auf *analytische* Beziehungen:
- bei *Atom*-Sätzen: auf analytische Beziehungen zwischen Subjekt und Prädikat
- bei Molekular-Sätzen: auf analytische Beziehungen zwischen den beiden Teilsätzen, zwischen Vordersatz und Nachsatz.

Die Intension eines (deskriptiven) *Zeichen/Wortes* habe ich bestimmt als *Begriff* (oder *Eigenschaft*), genauer als die Menge der *definierenden* Eigenschaften. Entsprechend wird hier festgelegt: Die Intension eines Satzes ist ein „Begriffsverhalt“, d. h. eine *Relation zwischen Begriffen* (oder *Eigenschaften*) bzw. zwischen einfacheren Begriffsverhalten. Der Terminus ‚Begriffsverhalt’ wurde analog zum extensionalen ‚Sachverhalt’ gebildet.
Das Konzept der Intension am tragfähigsten und überzeugendsten bei *material-analytischen* Sätzen, also Sätzen, die unmittelbar auf *Definitionen* beruhen (wie z. B. ‚alle Quadrate sind rechteckig’). Greifen wir wieder zurück auf die obige Satzeinteilung:

1) Individual-Satz
– *normal-sprachlicher* Satz: ‚Sokrates ist Philosoph’.
(material-analytisch verstanden, d. h. dass ‚Philosoph’ zur Definition von ‚Sokrates’ gehört)
Intension ist (der Begriffsverhalt): Der Allgemein-Begriff „Philosoph“ ist Teil(menge) des Individual-Begriffs „Sokrates“ (natürlich könnte man auch von ‚Eigenschaft’ sprechen).
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$x_i \in_{df} F$’ (Index ‚df’, weil der Satz *per definitionem* gelten soll)
Intension ist: $E(F) \subset E(x_i)$ bzw.: Der Begriff F ist eine Teilmenge des Begriffs x_i.

2) Klassen-Satz
– *normal-sprachlicher* Satz: ’Alle Philosophen sind Erdbewohner’.
Intension ist: Der Begriff „Erdbewohner“ ist Teil des Begriffs „Mensch“.
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subset_{df} G$’ (Index ‚df’, weil der Satz *per definitionem* gelten soll)
Intension ist: $E(G) \subset E(F)$ bzw.: Der Begriff G ist eine Teilmenge des Begriffs F.

3) Molekular-Satz
– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn Sokrates philosophiert, dann ist Sokrates ein Mensch’.
(material-analytisch verstanden, d. h. dass ‚Mensch’ zur Definition von ‚Philosoph’ gehört)
Intension ist (der Begriffsverhalt): Wenn die Eigenschaft „Philosoph“ Teil der Eigenschaft „Sokrates“ ist, dann ist die Eigenschaft „Mensch“ Teil der Eigenschaft „Sokrates“ (weil eben die Eigenschaft „Mensch“ Teil der Eigenschaft „Philosoph“ ist).
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$x_i \in_{df} F \rightarrow_{df} x_i \in_{df} G$’.
Intension: $E(F) \subset E(x_i) \rightarrow E(G) \subset E(x_i)$

4) Synthetischer Satz

Von großer Bedeutung ist die Intension nur bei *analytischen* Sätzen, vor allem *material-analytischen* Sätzen. Bei *synthetischen* Sätzen ist die Extension ungleich wichtiger als die Intension, diese lässt sich auch nur sehr schwer bestimmen, wie ich gleich zeigen werde.

Nehmen wir als Beispiel den *synthetischen* Satz: ‚Einige Quadrate sind blau'.
Zunächst zum Vergleich einen *analytischen* Satz: ‚Alle Quadrate sind rechteckig'.
Zur Erinnerung, hier ist die Intension (der Begriffsverhalt):

> Die Eigenschaft „rechteckig" ist Teil(menge) der Eigenschaft „quadratisch".

Kann man bei dem Satz ‚einige Quadrate sind blau' entsprechend die Intension bestimmen als: Die Eigenschaft „blau" ist Teil der Eigenschaft „quadratisch"? Offensichtlich nicht, denn die Intension soll ja die *definitorischen* (bzw. als wesentlich erachteten) Eigenschaften angeben. Für ein Quadrat ist es aber nicht definierend, dass es blau ist, es kann genau so gut rot, grün oder von jeder anderen Farbe sein. Was ist aber dann die Intension dieses Satzes?

Man könnte die Frage stellen, ob ein solcher synthetischer Satz *überhaupt eine Intension* hat, generell ob synthetische Sätze eine Intension besitzen oder nur extensional zu deuten sind. Aber die mögliche Lösung, synthetische Sätze haben keine Intension, wäre doch sehr unbefriedigend. Zunächst bietet sich nur eine *„negative" Intension* an, nämlich:

> Intension(‚einige Quadrate sind blau') = die Eigenschaft „blau" ist *nicht* Teil der Eigenschaft „quadratisch".
>
> Halb-formal wäre zu schreiben: E(blau) $\not\subset$ E(quadratisch).

Das könnte man übersetzen: *Einige* Teilbegriffe von „blau" sind nicht Teilbegriffe von „quadratisch". Aus M $\not\subset$ N folgt nicht automatisch N $\not\subset$ M, aber bei unserem Beispiel trifft beides zu. Man könnte also die Intension noch erweitern, als:

> E(blau) $\not\subset$ E(quadratisch) $\wedge$ E(quadratisch) $\not\subset$ E(blau)

Nun ergibt sich ein Problem: M $\not\subset$ N heißt genau: *mindestens ein* Element von M ist *nicht* Begriff von N, also ist möglich, dass auch *alle* Elemente von M *nicht* Elemente von N sind.

Dieser Fall ist hier aber nicht gegeben: „quadratisch" und „blau" haben z. B. die Eigenschaft „materiell" gemeinsam, beide sind Eigenschaften von materiellen – und nicht von geistigen – Objekten, man kann also nicht postulieren: *alle* Teilbegriffe von „blau" sind *nicht* Teilbegriffe von „quadratisch" (und umgekehrt), man kann *keinen Ausschluss* zwischen ihnen feststellen. Es lässt sich sogar zeigen, dass es intensional im Grunde *gar keinen Ausschluss* gibt.

Korrekt ist vielmehr: *genau einige* Teile von „blau" sind Teilbegriffe von „quadratisch" – und umgekehrt. Nun trifft dies den Sachverhalt, den man *Überschneidung* nennt. Mit dem Konzept der Überschneidung wäre die Intension des Beispielsatzes wie folgt zu fassen:

> Intension(‚einige Quadrate sind blau') = die Eigenschaft „blau" und die Eigenschaft „quadratisch" überschneiden sich.

So käme man also doch zu einer *positiven* Intension

Wir können die intensionalen Beziehungen auch mit *Modalbegriffen* kennzeichnen. Beim synthetischen Satz ‚einige Quadrate sind blau' wäre als Intension zunächst anzusetzen:

Die Eigenschaft „blau" ist *nicht notwendig* und *nicht unmöglich* (= möglich) in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch". Das ließe sich auch wie folgt ausdrücken:

Die Eigenschaft „blau" ist *kontingent* in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch".

0-3-5-5 IST DIE INTENSION DER WAHRHEITSWERT IN ALLEN WELTEN ?

Ich habe oben die Theorie kritisiert, nach der die *Extension* eines Satzes ein *Wahrheitswert* sei. Es gibt eine entsprechende Theorie, nach welcher die *Intension* eines Satzes sein *Wahrheitswert in allen möglichen Welten* sei. Manchmal wird auch differenziert: Die Intension eines Satzes ist eine *Funktion*, die ihm in jeder möglichen Welt einen Wahrheitswert zuweist. Aber dies ändert nichts Grundsätzliches an der Theorie.

Ich werde diese Theorie am Beispiel des aussagen-logischen Satzes ‚$X \rightarrow Y$' diskutieren. Dies könnte inhaltlich z. B. folgender Satz sein:
‚Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich'.

Die Intension von ‚$X \rightarrow Y$' wäre nach der obigen Theorie, gemäß der Wahrheitstafel:
wahr in der Welt $X \wedge Y$, falsch in der Welt $X \wedge \neg Y$
wahr in der Welt $\neg X \wedge Y$, wahr in der Welt $\neg X \wedge \neg Y$

Aber es ist recht kompliziert, immer anzugeben: Ein Satz ‚$X \rightarrow Y$' ist in dieser Welt wahr und in jener Welt falsch. Einfacher kann man *direkt* auf die *Welten* bzw. *Sachverhalte* Bezug nehmen und sie – wenn der Satz falsch ist – negieren. So ergibt sich für den Satz ‚$X \rightarrow Y$':
Intension von ‚$X \rightarrow Y$': $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$,
also eine Disjunktion der „wahren" Welten, der Welten, in denen ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist.
Nun lassen sich folgende Einwände erheben:

Erstens ist zu sagen, dass diese Theorie letztlich nur für *Molekular-Sätze* gilt, die mit *aussagen-logischen* Junktoren wie $\rightarrow$, $\wedge$ oder $\vee$ verbunden sind. Ein Satz wie ‚Sokrates ist Philosoph' ist nur für *eine* Welt als „wahr" definiert. Bei solchen Atom-Sätzen greift die Intensions-Definition nicht, und das bedeutet natürlich eine erhebliche Einschränkung.

Zweitens, nach dieser Theorie sind alle *logisch äquivalenten* Sätze auch *intensional gleich*, z. B. $X \rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \vee Y$. Ich möchte aber die Behauptung der intensionalen Gleichheit von ‚$X \rightarrow Y$' (‚wenn X, dann Y') und ‚$\neg X \vee Y$' (‚nicht X oder Y') kritisieren, denn ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' haben verschiedene Bedeutung. Das würde auch folgendes Experiment zeigen: Die wenigsten Menschen (wenn nicht gerade Logiker) würden sicher ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' als bedeutungsgleich ansehen. Logische Äquivalenz ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für intensionale Gleichheit. Sonst wären ja z. B. auch alle logischen Gesetze (Tautologien) bedeutungsgleich.

Drittens passen die geschilderte extensionale und die intensionale Satztheorie nicht wirklich zusammen.

Die *Extension* eines Satzes soll der Wahrheitswert sein, eine *empirische* Kategorie. Die Extension lässt sich somit auch nur bei einem *inhaltlichen* Satz bestimmen (Ausnahme: tautologische bzw. kontradiktorische Sätze, denn ein tautologischer Satz ist auch *empirisch* sicher wahr und ein kontradiktorischer Satz ist auch *empirisch* sicher falsch).

Die *Intension* eines Satzes – als Wahrheitswert in allen möglichen Welten – ist aber eine *theoretische* Kategorie. Die Intension eines Satzes ist dann ganz unabhängig von seiner Extension, die Intension z. B. vom Satz ‚$X \rightarrow Y$' bleibt gleich, unabhängig davon, ob der Satz ‚$X \rightarrow Y$' bzw. ein inhaltlicher Satz wie ‚Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich' empirisch wahr ist oder nicht.

Ich bleibe also bei meinem Modell: *Extension* eines Satzes ist ein *Sachverhalt*, *Intension* ist ein *Begriffsverhalt*, parallel zur Extension und Intension von Zeichen bzw. Wörtern.

0 – 4 KOPULA

0-4-1 Die Bedeutung der Kopula

0-4-1-1 DEFINITION DER KOPULA

Als Inbegriff der *Kopula* dient sprachlich das ‚ist', dieses ‚ist' steht für eine logische *Relation*. Grundsätzlich können wir 2 Arten von logischen Relationen unterscheiden:

- *Kopula*-Relationen: Relationen der Form: X *ist* ein Y
- *Nicht-Kopula*-Relationen: z. B.: X *oder* Y, X *und* Y

Wir werden später noch diskutieren, inwieweit letztlich doch eine *Äquivalenz* zwischen *logischen* Kopula- und Nicht-Kopula-Relationen besteht.

Zu den Nicht-Kopula-Relationen gehören aber auch *hyper-logische* (bzw. *hyper-korrelative*) Relationen, z. B. X *weil* Y (Kausal-Relation), X *nach* Y (Zeit-Relation) u. ä.; allerdings enthalten die hyper-korrelativen Relationen als Teil auch eine Kopula-Relation.

Die *Kopula* bzw. Kopula-Relation ist die wohl wichtigste Relation, die *Basis-Relation*, in unserer Sprache, unserem Denken, vielleicht auch real. Sie entspricht sprachlich wie gesagt vor allem dem *„ist"* bzw. grammatischen Variationen wie „sind" usw. Wir verwenden sie wortwörtlich z. B. in Individual-Sätzen wie ‚Sokrates *ist* ein Philosoph'.

Prinzipiell wäre es auch möglich, die Kopula als *generelle* bzw. generalisierte Aussagenfunktion zu deuten und somit von dem „ist" zu lösen. Dann wäre *jeder* Satz letztlich ein Kopula-Satz, weil er eben eine Aussage macht. Allerdings möchte ich nicht so weit gehen.

0-4-1-2 ATOM

Bei manchen Sätzen taucht in der Oberflächen-Struktur des Satzes das Wort ‚ist' nicht auf, aber man kann eine Tiefen-Struktur postulieren, in welcher die Kopula auftritt. Z. B. ‚Sokrates gehört zu den Philosophen'. Diese Tiefen-Struktur wäre dann zu formulieren als ‚Sokrates ist Philosoph' oder noch allgemeiner: ‚Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen'. Denn dies entspricht der formal-logischen (extensionalen) Struktur $x \in F$. Und so würde man auch ‚Sokrates ist Philosoph' *und* ‚Sokrates gehört zu den Philosophen' beide formalisieren.

• Molekül-Sätze
Molekül-Sätze (bzw. Molekül-Relationen) sind wie beschrieben *komplexe* Sätze, die weitere Sätze (Relationen) als Teile enthalten. Für sie ist die Kopula sehr viel schwieriger zu bestimmen. Es gibt nämlich weder in der normalen Sprache, noch in der Logik Molekular-Sätze, bei denen die Kopula *in ihrer eigentlichen Form* in der *Oberflächen-Struktur* auftritt.

Eine typische Kopula-Struktur für Molekular-Sätze ist *wenn-dann*. Z. B. ‚*Wenn* Sokrates Philosoph ist, *dann* ist er Denker'. Als Kopula-Tiefenstruktur kann man ansetzen: „Sokrates ist Philosoph, *ist*, er ist Denker". Bei *formal-logischen* Molekular-Sätzen dient in erster Linie die *Implikation* $\rightarrow$ als Kopula: z. B. $x \in F \rightarrow x \in G$

Es gibt aber Sätze bei denen auch in der Tiefen-Struktur *keine Kopula* auftritt. Das sind einmal logische Sätze wie die *Konjunktion* $(x \in F) \wedge (x \in G)$.

Dies sind andererseits *außer-logische* Sätze wie z. B. der *Kausal-Satz*: ‚weil X, darum Y'. Dieser enthält aber als Komponente den Kopula-Satz ‚wenn X, dann Y'. Insofern X Ursache von Y ist, gilt eben auch: wenn X (als Ursache) auftritt, dann muss auch Y (als Wirkung) auftreten; nur sagt der Kausal-Satz darüber hinaus aus, dass Y von X *verursacht* wird.

0-4-1-3 KOPULA-DEUTUNG IN DER NORMALEN SPRACHE

Je nach Stufe (Element, Klasse, Relation) und je nach Ausrichtung werden in der *normalen Sprache* unterschiedliche Wörter und Konstruktionen zum Ausdruck der Kopula-Funktion verwendet, vor allem:

– *Konjugationen des Hilfsverbs ‚sein'*: ich bin, du bist, er/sie/es *ist*, wir sind, ihr seid, sie sind bzw. andere Zeitangaben: ‚ich war' usw.)
– *Zahlwörter*: ‚alle Menschen sind sterblich' (für: ‚der Mensch *ist* sterblich')
– *Vollverben*: ‚er denkt' (für: ‚er *ist* ein Denkender')
– *Satz-Konstruktionen*: ‚wenn er Durst hat, trinkt er' (für: ‚er hat Durst, *ist*, er trinkt') usw.

Obwohl manche Formulierungen mit ‚ist' ungewöhnlich oder sogar grammatisch falsch sind, kann man das ‚ist' doch als generelle, einheitliche und neutrale Form der Kopula auffassen.

Es erweist sich als schwierig, die Bedeutung dieser einheitlichen Kopula auf *einen* Begriff zu bringen; vielleicht ist die beste Deutung: *Teilhabe*, *partielle Identität* oder *partielle Gleichheit.* Z. B. „Sokrates ist Philosoph" wäre dann zu verstehen als „Sokrates hat Teil an der Philosophie". Allerdings kann das ‚ist' auch bereits für *vollständige* Gleichheit, Identität bzw. Äquivalenz stehen, aber das ist die Ausnahme.

0-4-1-4 KOPULA-DEUTUNG IN DER LOGIK

In der logischen Sprache sind die sprachlichen Darstellungen der Kopula viel geringer als in der normalen Sprache, weil eben die Logik nur einen bestimmten Bereich der Wirklichkeit thematisiert, nämlich nur korrelative Relationen zwischen Objekten bzw. Eigenschaften.

So gibt es in der Logik keine Differenzierung zwischen erster, zweiter und dritter *Person*, die logische Sprache kennt nur die dritte Person; entsprechend existiert keine Konjugation in der Logik, ein Kopula-Zeichen wie ‚$\in$' wird nicht konjugiert. Auch gibt es in der reinen Logik keine *Zeit*, die Kopula-Relation ist hier *zeitlos*; dies im Gegensatz zur natürlichen Sprache, in der verschiedenen Zeitstufen wie Präsens, Perfekt, Imperfekt, Futur auch für die Kopula unterschieden werden – entsprechend er *ist*, er *war*, er *ist gewesen*, er *wird sein* usw.

Dennoch findet man auch in der Logik verschiedene Darstellungen der Kopula, in Verbindung mit verschiedenen Logik-Kalkülen. Um nur die bekanntesten bzw. gebräuchlichsten Formalisierungen bzw. Deutungen aufzuführen:

- Individuen-Relationen (Atom-Relationen):
  – extensional: $x \in F$
  – gemischt extensional-intensional: Fx
- Mengen-Relationen (Atom- oder Molekül-Relationen, je nach Logik)
  – Klassen-Logik: $F \subset G$
  – Quantoren-Logik:
    extensional: $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$
    gemischt: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
  – Prädikaten-Logik
    extensional: $(x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G) \wedge ... \wedge (x_n \in F \rightarrow x_n \in G)$
    gemischt: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
- Struktur-Relationen (Molekular-Relationen):
  Implikations-Relation $A \rightarrow B$

Nur wird eben normalerweise nicht erkannt und nicht ausgewiesen, dass es sich hier prinzipiell um *dieselbe* Relation handelt, die *Kopula-Relation*. Die *extensionale* und die gemischte *extensionale-intensionale* Darstellung sind strukturell gleich, somit können wir zunächst die extensionale-intensionale Darstellung zurückstellen. Auch die hier nicht aufgeführte *intensionale* Darstellung lässt sich (wie ausführlich erläutert) mengentheoretisch darstellen und braucht nicht extra berücksichtigt zu werden. So ergibt sich nur folgende Unterscheidung:

- Individuen-Relationen: Element-Relation $\in$
- Mengen-Relationen: Teilmengen-Relation $\subset$
- Molekular-Relationen: Implikations-Relation $\rightarrow$

Man kann aber die *Element*-Relation ($\in$) und die *Teilmengen*-Relation ($\subset$) zusammenfassen, in beiden geht es um ein *Enthaltensein*, beide nutzen die Sprache der *Mengenlehre;* so kommt man hier mit dem *Teilmengen-Relator* $\subset$ aus. Dagegen nutzt man üblicherweise für *Molekular*-Relationen die *Aussagen-Logik*, und zwar den *Implikator* ($\rightarrow$).

0-4-1-5 ZWEI GRUND-DEUTUNGEN DER KOPULA

Es gilt also primär nur 2 Deutungen der Kopula zu unterscheiden:

1. *Mengen-Lehre*: Teilmengen-Relation ($\subset$)
   Die verwendet man bei *atomaren* Relationen (einfachen Sätzen):
   Individuen-Relationen wie $x \subset F$ oder Mengen-Relationen wie $F \subset G$.
   Diesen Ansatz nenne ich *mengen-relational* oder kurz *relational*.

2. *Aussagen-Logik*: *Implikation* ($\rightarrow$)
   Die verwendet man bei *molekularen* Relationen (komplexen Sätzen),
   zur Verknüpfung von atomaren Relationen, z. B.: $(F \subset G) \rightarrow (F \subset H)$.
   Diesen Ansatz nenne ich *wahrheits(wert)-funktional* oder kurz *funktional*.

Wichtig ist: Der *relationale* Ansatz muss nicht *extensional* ausgerichtet sein, d. h. sich auf *Objekte* bzw. *Objekt-Mengen* beziehen. Denn man kann – *intensional* – *Eigenschaften* auch als *Eigenschafts-Mengen* bestimmen, und zwischen solchen Eigenschafts-Mengen (intensionalen Mengen) können ebenfalls *Teilmengen-Relationen* bestehen. Nur für eine *extensional-intensional gemischte* Darstellung ist der relationale Ansatz nicht geeignet.

Ebenso ist der *funktionale* Ansatz offen für eine extensionale oder intensionale und auch für eine gemischte Deutung. Dabei muss er sich nicht notwendig auf *Mengen* beziehen.

Es geht in der Wissenschaft immer darum, möglichst eine *einheitliche* Darstellung und Deutung zu finden, und dies ist auch das besondere Ziel der *Integralen Logik*. Nach meinen Untersuchungen lässt sich zeigen: Bei der *Teilmengen-Relation* $\subset$ und der *Implikation* $\rightarrow$ (bzw. der Positiv-Implikation $*\rightarrow$) handelt es sich strukturell um *dieselbe* Relation. Und dann ist es wesentlich übersichtlicher, man verwendet auch nur *ein* Symbol hierfür.

Ich werde im Folgenden zwei Möglichkeiten durchspielen:

- erstens nur Verwendung der *Mengen-Theorie* (mit dem Symbol $\subset$)
- zweitens nur Verwendung der *Aussagen-Logik* (mit dem Symbol $\rightarrow$).

0-4-2 Kopula als Teilmengen-Relation

0-4-2-1 INDIVIDUEN-RELATIONEN

Individuen-Relationen können zwischen zwei oder mehreren Individuen bestehen, sind aber vorrangig *Relationen zwischen Individuen und Mengen* bzw. Klassen.

Normalerweise verwendet man bei *extensionalen* Individuen-Relationen das Symbol ‚$\in$'. Aber für die einheitliche Formalisierung kann man das Teilmengen-Symbol ‚$\subset$' verwenden, um so mehr, als sich ein Individuum auch als *ein-Element-Menge* auffassen lässt.

$x_i \subset F$ = x_i ist *Element* der Klasse F (bzw. eben x_i ist Teilmenge der Klasse F)

Beispiel: „Sokrates ist Philosoph" = „Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen".

Streng extensional formuliert: „Das individuelle Objekt Sokrates ist Teilmenge der Objekt-Klasse der Philosophen".

Auf die *intensionale* (bzw. extensional-intensional gemischte) Darstellung der Kopula-Funktion verzichte ich hier wie gesagt. Man kann die Auffassung vertreten, dass auf der Ebene der *Individuen* überhaupt *nur* die Kopula-Relation im Sinne von „ist Element von" als logische Relation vorkommt, natürlich einschließlich der *Negation*: „ist nicht Element von", weil es nur diese 2 Möglichkeiten einer Beziehung eines Individuums zu einer Klasse gebe (so finden sich in der Mengenlehre für Individuen-Relationen auch nur die Zeichen $\in$ und $\notin$).

0-4-2-2 MENGEN-RELATIONEN / KLASSEN-RELATIONEN

Es geht hier um Relationen zwischen *Mengen* bzw. zwischen *Klassen*.

So wie man individuell sagt ‘Sokrates ist ein Philosoph', kann man allgemein sagen ‘alle Philosophen sind Denker'. Oder, wenn man genau das ‘ist' verwenden will: ‘Der Philosoph ist ein Denker'.

In der – tiefen-strukturellen – Sprache der extensionalen *Mengen-Lehre* heißt das: ‘Die Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Klasse der Denker'. Streng: ‘Die Objekt-Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Objekt-Klasse der Denker'.

$F \subset G$ = Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G

Die wichtigsten Relationen zwischen Klassen bzw. Mengen sind wiederum die Kopula-Relationen oder *Teilmengen*-Relationen, und zwar die folgenden:

$F \subset G$	Teilmenge F ist (echte) Teilmenge von G	 *Alle F sind G, einige G sind F*
$F \not\subset G$	Nicht-Teilmenge F ist nicht Teilmenge von G	 *Einige F sind nicht G*
$F = G$	Identität F ist Teilmenge von G, G ist Teilmenge von F *Alle F sind G, alle G sind F*	

Entsprechendes gilt für die *Umkehrung* der Teilmengen-Relation: $F \supset G$ (F enthält G als Teil) und deren Negation. Zwar sind auch andere logische Relationen zwischen Mengen möglich, z. B. *Überschneidung*. Aber sie spielen eine geringere Rolle, worauf schon verweist, dass es keine gebräuchlichen Zeichen dafür gibt.

0-4-2-3 MOLEKULAR-RELATIONEN – UNSTRUKTURIERT

Es geht hier um *Relationen zwischen Relationen*. Diese nenne ich *Molekular-Relationen*, im Gegensatz zu den *Atomar-Relationen* (Relationen zwischen Individuen bzw. Mengen).

Aber in der Logik werden diese Molekular-Relationen oft *ganzheitlich*, ohne ihre Struktur erfasst, in dem man ihnen die Buchstaben ‚A' und ‚B' zuordnet. So wird z. B. eine Relation $F \subset G$ gleich A gesetzt, ohne ihre Struktur zu berücksichtigen.

Dabei wird gerade hier die *sprachliche* Deutung herausgehoben, indem man ‚A' und ‚B' als „Aussagen" oder „Sätze" bezeichnet.

Der wohl wichtigste Relator zur Verbindung von Relationen ist der *Implikator* $\rightarrow$ (bzw. $*\!\rightarrow$). Es handelt sich hierbei um die *Kopula*. Nur ist die Kopula-Funktion oft nicht direkt erkennbar. Man spricht nicht: ‘A ist B', stattdessen: ‘A impliziert B'. Oder: ‘Wenn A dann B'. Oder: ‘Aus A folgt B'.

Formal schreibt man herkömmlich: $A \rightarrow B$

Heißt: „Die Aussage A impliziert die Aussage B" oder „Wenn die Aussage A wahr ist, ist auch die Aussage B wahr".

Nun geht es hier darum zu zeigen, dass sich auch für *Molekular-Relationen* eine Kopula-Deutung mit $\subset$ geben lässt, vereinfacht, dass man für $A \rightarrow B$ auch $A \subset B$ einsetzen kann.

Die *Mengen-Deutung* für $A \subset B$ ist allerdings ungewöhnlich. Angenommen es gilt:

A: Der Himmel regnet B: Die Strasse ist nass

Dann ist zu interpretieren: „Die Fälle, in denen der Himmel regnet, sind eine Teilmenge der Fälle, in denen die Strasse nass ist". (Statt von *Fällen* könnte man auch von *Welten* sprechen.) Exakter: „Die Klasse der Fälle, in denen der Himmel regnet, sind eine Teilmenge der Klasse der Fälle, in denen die Strasse nass ist". Denn die Strasse kann ja auch aus anderen Gründen nass werden, z. B. weil jemand seinen Wagen wäscht. Allgemeiner: „Die Klasse der Welten, in denen A gültig ist, ist eine Teilmenge der Klasse der Welten, in denen B gültig ist".

0-4-2-4 MOLEKULAR-RELATIONEN – STRUKTURIERT

Aus Sicht der Integral-Logik ist der Bezug auf *Aussagen* aber wie gesagt nicht notwendig. Es geht – strukturell – um *Molekular-Relationen*, z. B. der Form:

$F_1 \subset G \rightarrow F_2 \subset H.$

Wenn F_1 Teilmenge von G ist, dann ist F_2 Teilmenge von H.

Man setzt also $A = F_1 \subset G$ und $B = F_2 \subset H$.

Bei diesem Beispiel ist aber die eigentliche Struktur der Molekular-Relation nicht berücksichtigt, weil wir auf die Symbole ‚A' und ‚B' zurückgreifen. Nehmen wir daher ein genaueres Beispiel.

Zunächst formal: $(F \subset G) \subset (G \subset H)$.

Bedeutet: „Die Klasse der Relationen $F \subset G$ ist eine Teilmenge der Klasse der Relationen $G \subset H$".

Konkretes Beispiel: „Die Klasse der Relationen, dass die Klasse der Lehrer eine Teilmenge der Klasse der Zeitungsleser ist, ist Teilmenge der Klasse der Relationen, dass alle Zeitungsleser auch Kinogänger sind".

0-4-2-5 ZUSAMMENFASSUNG

Bei der *Teilmengen-Relation* $\subset$ geht es um ein *Enthaltensein*. Hierzu werden, je nach Anwendung auf Individuen oder Mengen/Klassen, 2 verschiedene Zeichen $\in$ und $\subset$ verwendet, was aber nicht notwendig ist. Ich wähle nur das Zeichen $\subset$ für die Teilmengen-Relation. Dann ergeben sich folgende (extensionale) Möglichkeiten:

- $x \subset F$: Das Individuum x ist Teilmenge der Klasse F
- $F \subset G$: Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G
- $A \subset B$: Die Relation A ist Teilmenge der Relation B

- $\Phi \subset \Psi$: Die Komponente Φ ist Teilmenge der Komponente Ψ

So wäre unter Absehung der speziellen Anwendung allgemein zu schreiben.

Will man die herkömmliche *Kopula-Formulierung* (mit ‚ist') verwenden, müsste man sagen:
• $x \subset F$: x ist ein F • $F \subset G$: Jedes F ist G • $A \subset B$: A ist (immer) B

0-4-3 Kopula als Implikation

0-4-3-1 WAHRHEITSWERT-FUNKTIONALE DEUTUNG

Bei dieser Deutung geht es darum, dass eine Relation eine andere Relation *impliziert*. Dabei ist die *Implikation* $\rightarrow$ neutral gegenüber extensionaler oder intensionaler Interpretation. Man kann sie durchaus auf Mengen und Klassen anwenden; nur bestimmt man keine Teilmengen-Relation zwischen diesen, sondern eben eine implikative Relation.

Allerdings ist ein wichtiger Unterschied zwischen der *Teilmengen-Relation* $\subset$ und der *Implikation* $\rightarrow$ zu beachten. Die Implikation ist, wie überhaupt alle Relatoren der Aussagen-Logik, *wahrheitswert-funktional* definiert. Das bedeutet: Der *Wahrheitswert* der Gesamtaussage $A \rightarrow B$ ist eine *Funktion* der Wahrheitswerte der Einzel-Aussagen A bzw. B. Oder kurz: Wenn A wahr ist und B wahr ist, dann ist auch $A \rightarrow B$ wahr. Formal: $(A \wedge B) \Rightarrow (A \rightarrow B)$. Man kann den *implikativen* Ansatz daher auch *wahrheits(wert)-funktionalen* oder kurz *funktionalen* Ansatz nennen.

Dies in Abgrenzung zum *mengen-relationalen* Ansatz. Dort wird eine solche Deutung nicht vorgenommen: Wenn die Mengen X und Y belegt („gefüllt") sind, heißt dies noch nicht, dass X Teilmenge von Y ist. Es gibt allerdings Ausnahmen: Wenn $\{X\} = \varnothing$, dann gilt $\{X\} \subset \{Y\}$, denn die leere Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge.

Ich verwende hier zur Einfachheit zwar die *normale Implikation* $X \rightarrow Y$, aus Gründen der *Paradoxien* dieser Implikation wäre aber eigentlich die *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ zu gebrauchen (vgl. 0-2-5-5), die eine wirkliche Parallele zur Mengen-Relation $X \subset Y$ darstellt.

Die Interpretation von *Atom-Sätzen* mittels der Implikation, z. B. einer *Wenn-dann-Relation*, ist und klingt ungewöhnlich, hat aber durchaus ihre Plausibilität und Eleganz, wenn man sich auf diese Formulierungen einlässt. Dagegen ist die Implikation bei *Molekular-Sätzen* die gewohnte Kopula-Deutung.

0-4-3-2 INDIVIDUEN-RELATION

Die Individuen-Relation wäre zu schreiben:

$x \rightarrow F$ bzw. $x_1 \rightarrow F$.

Oder wenn man herausstellen will, dass es sich bei F um eine *Klasse* (und nicht um eine *Eigenschaft* handelt): $x_1 \rightarrow K(F)$

Im Beispiel: „Sokrates → Philosoph“.

Normale Sprache:

Mit Verwendung des Begriffs ‚impliziert’ könnte man interpretieren:

„Sokrates impliziert die Klasse der Philosophen“.

Aber andere Deutungen sind plausibler, z. B. mit „*wenn – dann*“, womit die Implikation ja meistens wiedergegeben wird.

„Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt (nicht leer)“.

„Wenn die ein-Element-Klasse Sokrates belegt ist, dann ist auch die Klasse der Philosophen belegt“ u. ä.

Oder: „Es ist nicht wahr, dass Sokrates existiert und die Klasse der Philosophen leer ist“.

Formale Sprache:

Formal ergeben sich entsprechende Deutungen, z. B. für $x_1 \rightarrow F$:

„Wenn das Individuum x_1 existiert, dann hat die Klasse F mindestens ein Element“.

Hier sind auch extensional-intensional gemischte Deutungen möglich, z. B.:

„Wenn x_1 existiert, dann hat die Eigenschaft F mindestens einen Träger“.

0-4-3-3 MENGEN-RELATION

Es geht hier um die Mengen-Relation / Klassen-Relation, z. B. $F \rightarrow G$ bzw. $K(F) \rightarrow K(G)$; dabei steht ‚K’ für Klasse (da → ebenso für *intensionale* Deutungen steht, kann man durch Einfügen von ‚K’ die *extensionale* Interpretation unterstreichen).

Dabei bieten sich folgende *Deutungen* an:

„Wenn die Klasse F belegt („gefüllt“) ist, dann auch die Klasse G“.

„Wenn die Klasse F mindestens ein Element besitzt, dann auch die Klasse G“.

Im Beispiel: K(Philosoph) → K(Denker).

„Die Klasse der Philosophen impliziert die Klasse der Denker“.

„Wenn die Klasse der Philosophen belegt ist, ist auch die Klasse der Denker belegt“

Auch *intensionale* Relationen sind so darzustellen, z. B. E(Blume) → E(Rose).

„Der Begriff der Blume impliziert den Begriff der Rose“.

Allerdings sind hier Missverständnisse möglich. Normal-sprachlich würde man eher umgekehrt formulieren, also: ‚Der Begriff der Rose impliziert den Begriff der Blume’; aber das ist nicht wirklich intensional, denn intensional weist der Pfeil in die andere Richtung wie extensional. In der Sprache der *Mengen-Theorie* wäre wie folgt zu formulieren:

extensional:	K(Rose) → K(Blume).	Die Klasse der Rosen ist Teilmenge der Klasse der Blumen
intensional:	E(Blume) → E(Rose)	Die Eigenschafts-Klasse „Blume“ ist Teilmenge der Eigenschafts-Klasse „Rose“

0-4-3-4 MOLEKULAR-RELATION

Für Molekular-Relationen ist die *Implikation* → wie gesagt die *übliche* Darstellung der Kopula-Funktion. Hier wählt man sprachlich meistens die *Wenn-dann-Form*.

Beispiele wurden bereits gebracht.

Formal-sprachlich:

A → B in der Aussagen-Logik oder in der Quantoren-Logik Λx(Fx → Gx)

Halb-Formal:

Die Sonne scheint → Das Wasser ist warm

Normal-sprachlich:

'Wenn die Sonne scheint, ist das Wasser warm' usw.

Nun sind neben der Implikation A → B andere *implikative* Beziehungen zu unterscheiden, die eine Kopula-Funktion haben können, insbesondere:

Implikation	A → B
Verneinte Implikation	A → ¬B
Replikation	A ← B
Verneinte Replikation	¬A ← B

(Mit Einschränkung auch die *Äquivalenz* A ↔ B oder verneinte Äquivalenz A ↔ ¬B.)

0-4-3-5 ZUSAMMENFASSUNG

Mit dem Implikator → ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- Individuen-Relation: x → F
- Klassen-Relation: F → G bzw. M → N
- Molekular-Relation: A → B

Wie gesagt abstrahiert die Integral-Logik wo möglich von diesen Unterschieden und schreibt allgemein X → Y bzw. noch allgemeiner: Φ → Ψ, mit der Bedeutung:

„Wenn Φ (positiv) ist, dann ist auch Ψ (positiv)"

„Φ und Ψstehen in der Relation der Implikation"

„Φ impliziert Ψ"

Die Implikations-Deutung ist bei *Relationen* (Sätzen) üblich, aber bei *Objekten* (Wörtern) ungewöhnlich. Sie wird hier dennoch auch auf Individuen und Mengen angewandt, die durch den Relator quasi *relationiert* werden, also selbst in eine Relation umgewandelt werden.

Aus „Sokrates" wird „Sokrates existiert".

Aus „Klasse Mensch" wird „Die Klasse Mensch hat Elemente".

0-4-4 Probleme der Kopula

0-4-4-1 KOPULA- UND NICHT-KOPULA-RELATIONEN

Allerdings kann hier folgender Einwand gemacht werden: Es ist nicht berechtigt, den *Kopula-Relator* Implikation und andere implikative Relationen bzw. Relatoren von den übrigen logischen Relatoren als *Nicht-Kopula-Relatoren* abzugrenzen.

Diese übrigen Relatoren wie z. B. ∧ oder ∨ lassen sich *in die Implikation umformen* (jedenfalls mit Verwendung der Negation oder anderer Relatoren). Z. B.:

$$A \wedge B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$$

Umgekehrt lässt sich die Implikation in andere Junktoren umformen, z. B.

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \qquad \text{oder} \qquad A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$\neg(A \wedge \neg B)$ übersetzt man hier am besten mit: „Es ist nicht wahr, dass A wahr ist und B falsch ist"; $\neg A \vee B$ mit „A ist falsch oder B ist wahr".

Die These ist also: Es gibt letztlich keinen relevanten Unterschied zwischen Kopula-Relationen und nicht Kopula-Relationen, sie sind *logisch äquivalent*. Man könnte höchstens sagen, dass sich die *Kopula-Funktion* zwar am direktesten durch die Implikation ausdrücken lässt, indirekt aber auch durch Umformungen der Implikation.

Gegen diesen Einwand ist Folgendes zu erwidern:

Erstens, die entsprechenden Ausdrücke wie $A \rightarrow B$ und $\neg(A \wedge \neg B)$ sind zwar *logisch äquivalent*, aber nicht *bedeutungsgleich*. Dies wurde schon im Punkt 0-3-5 genauer begründet.

Zweitens, der normal-sprachlichen Kopula entspricht sehr viel besser die *Positiv-Implikation* $A^*\!\rightarrow B$ als die Implikation $A \rightarrow B$. Und die Positiv-Implikation lässt sich nicht in eine Konjunktion, Disjunktion oder eine andere Relation umformen; denn die Positiv-Implikation $A\ {}^*\!\!\rightarrow B$ ist nur für 2 Welten definiert, dagegen sind $A \wedge B$, $A \vee B$ usw. jeweils für 4 Welten definiert. Ich werde zwar im Folgenden zunächst die *normale* Implikation weiter verwenden (weil sie besser eingeführt ist), man muss aber bedenken, dass sich die Aussagen oft besser auf die Positiv-Implikation beziehen lassen.

0-4-4-2 ATOM- UND MOLEKULAR-RELATIONEN

Insbesondere ist es berechtigt, betreffend Kopula- versus Nicht-Kopula-Relationen einen *Unterschied* zwischen *Atomar-Relationen* und *Molekular-Relationen* zu konstatieren:

Bei den *Atomar*-Relationen geht es vorrangig um die *Kopula-Relation.* Man könnte sogar die konsequente These vertreten, dass bei Atomar-Relationen *nur* die Kopula Sinn macht, nicht dagegen Relatoren wie Konjunktor $\wedge$, Disjunktor $\vee$ u. a.

Z. B. ist K(Philosoph) $\rightarrow$ K(Mensch) implikativ recht unproblematisch zu interpretieren, nämlich: „Wenn die Klasse der Philosophen belegt ist, dann auch die Klasse der Menschen".

Schwieriger ist dagegen die Deutung eines *Atom*-Satzes wie ‚K(Philosoph) $\wedge$ K(Mensch)'.

In erster Linie betrifft dieses Problem aber Atom-Relationen, in denen ein *Individuum* vorkommt (bzw. Atom-Sätze mit Individuumszeichen). Ob ein *Individual-Satz* mit *Konjunktion* – – wie $x \wedge F$, z. B. ‚Sokrates $\wedge$ Mensch' – sich plausibel interpretieren lässt, kann man in Frage stellen. Die Konjunktion ‚Sokrates $\wedge$ Mensch' (nur in 1 Welt wahr) ist ja noch stärker als die Äquivalenz ‚Sokrates $\leftrightarrow$ Mensch' (in 2 Welten wahr) – und schon die macht wenig Sinn.

Allerdings hatten wir 'Sokrates ist ein Mensch' auch übersetzt mit: ‚Es ist nicht wahr, dass Sokrates existiert, aber kein Mensch existiert'. Dieser Satz besitzt aber die logische Struktur $\neg(x \wedge \neg F)$; hier wird also doch die Konjunktion in einem *Individual*-Satz verwendet, wenn auch in *negierter* Form (damit in 3 Welten wahr).

Bei den *Molekular*-Relationen sind dagegen *alle* Relatoren bzw. Junktoren sinnvoll anzuwenden und gebräuchlich.

$$A \wedge B,\ A \vee B,\ A \,|\, B,\ A >< B,\ A >- B,\ A -< B \text{ usw.}$$

0-4-4-3 WÖRTER VERSUS SÄTZE

Ich habe oben die *implikative* oder funktionale Interpretation bei *Wörtern* (bzw. Objekten) eingeführt. Diese Überlegungen könnten dazu führen, den Unterschied zwischen Wörtern und Sätzen (bzw. Objekten und Relationen / Sachverhalten) generell zu relativieren. Man sagt nicht nur von Sätzen, sondern auch von Wörtern, dass sie „wahr" oder „falsch" sind. Man geht davon aus, dass sich grundsätzlich für alle Entitäten angeben lässt, ob sie positiv („wahr“) oder negativ („falsch“), besser „belegt“ oder „nicht belegt“ (= „leer“) sind.

Das lässt sich folgendermaßen begründen:

Wörter (Zeichen) haben wie Sätze eine *Doppelfunktion*:

- *Bezeichnung*
- *Existenz-Behauptung* (bzw. Wahrheits-Behauptung).

0-4-4-4 DOPPELFUNKTION VON SÄTZEN

Bei einem *Satz* geht man zunächst davon aus, dass er wahr ist; er enthält *implizit* eine *Wahrheits-Behauptung*. So ist der Satz ‚Sokrates ist ein Mensch’ zu verstehen als: ‚Es ist wahr, dass Sokrates ein Mensch ist’. Natürlich kann der Satz auch falsch sein, dann kennzeichnet man das normalerweise durch eine *Negation*: ‚Sokrates ist *kein* Mensch’ oder mit Verwendung von ‚falsch’: ‚Es ist falsch, dass Sokrates ein Mensch ist’. Für diesen Satz gilt dann allerdings wiederum die implizite Wahrheitsbehauptung: ‚Es ist wahr, dass es falsch ist, dass Sokrates ein Mensch ist’.

In der Wahrheitstafel der Logik wird einem Satz entsprechend als *möglicher* Wert sowohl „wahr“ wie „falsch“ zugeordnet. Man kann also sagen, dass ein Satz einerseits einen Sachverhalt *bezeichnet*, andererseits eine *Wahrheits-Behauptung* vornimmt, nämlich dass der Sachverhalt besteht.

0-4-4-5 DOPPELFUNKTION VON WÖRTERN

Entsprechend kann man bei *Wörtern* diese *Doppelfunktion* feststellen: z. B. der Name ‚Sokrates’: Er *bezeichnet* einerseits die Person Sokrates, andererseits behauptet er *implizit* auch die *Existenz* von Sokrates. Man könnte ‚Sokrates’ daher verstehen als ‚Sokrates existiert’. Damit würde ein Wort quasi bereits zu einem Satz. Eine Aussage wie ‚Sokrates ist Philosoph’ wäre dann zu verstehen als: ‚Sokrates existiert und ist Philosoph’. Will man ausdrücken, dass Sokrates nicht existiert, müsste man ein ‚nicht’ vor den Namen setzen: ‚nicht Sokrates’, im Sinne: „es ist nicht wahr, das Sokrates existiert“; allerdings ist diese Schreibweise in der normalen Sprache nicht üblich.

Genauso wie man für einen Satz eine *Wahrheitstafel* aufstellt, so könnte man dies auch für ein Wort tun. Man kann auch hier die *möglichen Welten* unterscheiden: das Wort ist „wahr“, d. h. es bezeichnet etwas Existierendes, oder es ist „falsch“, seine Extension ist leer.

Es ist im Grunde nicht einzusehen, warum man diesbezüglich eine strikte Abgrenzung von Sätzen und Zeichen/Wörtern vornehmen soll: Sätze bezeichnen etwas (oder sagen etwas aus) und behaupten Wahrheit, Wörter dagegen bezeichnen nur etwas – nein, man kann Wörter auch so verstehen, dass sie Existenz behaupten. Natürlich geht es hier nicht um alle Wortklassen, nicht um Partikel usw. Man könnte allerdings einschränken und sagen, dass Wörter nur *im Kontext einer Relation*, also innerhalb eines Satzes, eine Existentbehauptung besitzen und nicht eigenständig als Satz fungieren.

Ähnlich wird auch in der herkömmlichen *Quantoren-Logik* verfahren: Aus „Alle Menschen sind sterblich“ der normalen Sprache macht die Logik: „Für alle x gilt: wenn sie Menschen sind, dann sind sie sterblich“. Formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. D. h. das Zeichen/Wort ‚Mensch’ wird in einen *Konditional-Satz* umgewandelt ‚wenn sie Menschen sind’. Betrachtet man die vollständige Konstruktion, wird aus ‚Mensch’ sogar ein *Satzgefüge*: ’Für alle x gilt’(Hauptsatz): ‚wenn sie Menschen sind...’ (Nebensatz).

Diese Überlegungen leiten über zum Modell einer einheitlichen *funktionalen Logik*.

0-4-5 Funktionale Logik

0-4-5-1 GENERELLER FUNKTIONALER ANSATZ

Ich habe zwei *einheitliche* Ansätze zur Interpretation der Kopula diskutiert:

- Kopula als *Teilmengen-Relation* (Mengen-Lehre)
- Kopula als *Implikations-Relation* (Aussagen-Logik)

Ich halte das *implikative Modell* für überlegen. Man kann es, wie schon oben bemerkt, auch das *funktionale Modell* nennen, weil hier der Wahrheitswert einer Relation (eines Satzes oder einer Struktur) eine *Funktion* der Wahrheitswerte der Relata ist, natürlich einschließlich der Definition der Relation. Eine solche *wahrheitswert-funktionale Semantik* ist in der Aussagen-Logik bekannt, man kann z. B. aus der Wahrheit der Sätze ‚A' und ‚B' auf die Wahrheit von ‚A $\rightarrow$ B' als Gesamtsatz schließen.

Mein Ansatz geht aber weiter. Ich kann auch bei dem Satz ‚Sokrates ist Philosoph' ($x_1 \rightarrow F$) aus der „Wahrheit" von ‚Sokrates' und ‚Philosoph' auf die Wahrheit des Gesamtsatzes schließen. Allgemein: Man vermag aus der *Gültigkeit/Ungültigkeit* der Relata die Gültigkeit/Ungültigkeit des Relationssystems ableiten. Ich verwende den Begriff der Gültigkeit (Ungültigkeit) also nicht eingeschränkt auf logische Schlüsse, wie dies sonst häufig vorgenommen wird. Im Speziellen lässt sich für *Gültigkeit* bzw. *Ungültigkeit* festlegen:

- *Abstrakte Entitäten*
  - Klasse: hat Elemente (+), hat keine Elemente, ist leer (–)
  - Individuum: ist definiert (+), ist nicht definiert (–)
  - Relation: ist positiv (+), ist negativ (–)
- *Real*
  - Ding: existiert (+), existiert nicht (–)
  - Sachverhalt: besteht (+), besteht nicht (–)
- *Sprachlich*
  - Wort: hat eine Extension (+), hat keine Extension (–)
  - Satz: ist wahr (+), ist falsch (–)
- *Psychisch*
  - Begriff: hat Träger (+), hat keinen Träger (–)
  - Urteil: ist richtig (+), ist falsch (–)

Allerdings sind verschiedene *Einwände* gegen dieses Modell denkbar, von denen ich jetzt drei im Einzelnen diskutieren werde.

0-4-5-2 EINWAND: SINNLOSIGKEIT VON NICHT-EXISTENZ-AUSSAGEN

Ich habe gesagt, dass man dem Wort ‚Sokrates' zwei Werte zuweisen kann: „gültig" oder „nicht gültig": Sokrates existiert – Sokrates existiert nicht. Nun könnte man einwenden: Eine Aussage wie ‚Sokrates existiert nicht' ist unsinnig. Denn wenn Sokrates nicht existiert, lässt sich ja keine Aussage über ihn machen, nicht einmal die Aussage seiner Nicht-Existenz – man gerät in eine *Paradoxie*. Man könnte andererseits ‚Sokrates existiert' als Tautologie bezeichnen, denn man könne eben nur etwas über ihn aussagen, wenn er existiert.

Dieser Einwand ist, wenn man es genau sieht, korrekt, allerdings betrifft er nicht nur den funktionalen Ansatz; sondern es geht um ein bekanntes Problem in der Philosophie, z. B. wird ja auch von „*leeren Mengen*" gesprochen wird, was letztlich die gleichen Probleme aufwirft.

Eine entsprechende Situation besteht bei *negativen* oder *nicht bestehenden Sachverhalten* (z. B. „Sokrates ist kein Mensch"). Man könnte die Problematik auch weiter ausdehnen und sagen: Es gibt keine *negativen* Sachverhalte – also alle Sachverhalte der Art „x ist kein F", „alle F sind keine G" usw. sind unsinnig.

Man kann sich diesen Problemen aber leicht entziehen durch einen Rückgriff auf die *sprachliche* Ebene, die *Meta-Ebene*. Denn es ist sehr wohl sinnvoll zu sagen:

> Das Wort (der Name) ‚Sokrates' hat *eine* Extension.
>
> Oder eben: Das Wort (der Name) ‚Sokrates' hat *keine* Extension.
>
> Bzw.: Es gibt nichts, das von dem Wort ‚Sokrates' bezeichnet wird.

Dies lässt sich auch durch eine Relation fassen: Das Wort ‚Sokrates' steht zu keinem realen Objekt in der Relation der Bezeichnung.

Auch um solchen Schwierigkeiten zu entgehen, hat sich die neuere Logik überwiegend von der *realen* Objekt-Ebene zur *sprachlichen* Meta-Ebene orientiert, insbesondere von den *Sachverhalten* abgewandt und den *sprachlichen* Relationen, *Aussagen* oder *Sätzen* zugewandt. Ich halte dieses Problem aber insgesamt für vernachlässigbar.

0-4-5-3 EINWAND: DYSFUNKTIONALE ÜBERSETZUNG

Wird durch die funktionale Umformung die Aussage wirklich inhaltlich getroffen? Kann man wirklich folgendermaßen übersetzen?

> „Sokrates ist Philosoph" in:
>
> „Wenn Sokrates existiert, dann ist die Klasse der Philosophen belegt" oder:
>
> „Wenn (der Eigenname) ‚Sokrates' eine Extension besitzt, dann besitzt auch (der Prädikator) ‚Philosoph' eine Extension".

Zunächst kann man denken, diese Übersetzung bzw. Analyse wird der ursprünglichen Struktur prinzipiell gar nicht gerecht. Denn wenn im ersten Fall Sokrates existiert und es Philosophen gibt, heißt das denn schon, dass Sokrates ein Philosoph ist? Aber wenn Sokrates und die Klasse der Philosophen eben in bestimmter Weise *zusammen* belegt oder nicht belegt sind, dann drückt dies offensichtlich genau die Kopula-Bedeutung „ist" aus.

Oder drückt „Sokrates ist Philosoph" eine (partielle) *Identität* aus, die Übersetzung dagegen nur eine *Korrelation*, die auch zufällig sein könnte? Man könnte postulieren, „Sokrates ist weise" sagt eben aus, dass die Weisheit *an* der Person Sokrates auftritt, z. B. an der gleichen *Raum-Zeit-Stelle*.

Ob die Aussage durch die *funktionale Umformulierung* wirklich *vollständig* erfasst wird, das wäre in weiteren Untersuchungen zu klären. Eventuell müsste man unterscheiden zwischen einer *rein funktionalen*, korrelativen Kopula-Aussage und einer *hyper-korrelativen* Kopula-Aussage, die noch zusätzliche Eigenschaften besitzt; aber die Basis ist in jedem Fall die korrelative Aussage, die sich auch durch Implikation darstellen lässt.

Eine ähnliche Problematik ergibt sich auch bei *Molekül-Sätzen*:

> z. B. ‚Wenn es regnet, ist die Strasse nass'.

Bei diesem Wenn-dann-Satz liegt offensichtlich nicht nur eine *Korrelation* vor, sondern auch eine *Kausalbeziehung*. Dagegen:

> z. B. ‚Wenn ein Mensch groß ist, ist er besonders klug'.

Dieser Zusammenhang mag stimmen oder auch nicht, aber wenn, wäre er nach unserem Wissen rein *zufällig*, keine Kausalrelation.

0-4-5-4 EINWAND: KEINE EXISTENZ-BEHAUPTUNG

Der dritte Einwand hängt speziell mit der *Implikation* zusammen. Er besagt: Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist so definiert, dass sie auch wahr ist, wenn X falsch ist.

Im Beispiel: Der Satz ‚Sokrates $\rightarrow$ Philosoph' wäre demnach auch wahr, wenn ‚Sokrates' falsch ist, also Sokrates nicht existiert. Dies entspricht nun in der Tat gar nicht dem normal-sprachlichen Satz. Aber dieses Problem ergibt sich nicht durch das funktionale Modell, sondern durch die Definition der Implikation (die Problematik der Implikation beschäftigt uns an vielen Stellen in diesem Buch).

Man kann der Schwierigkeit entgehen, wenn man die *Positiv-Implikation* X *→ Y verwendet, denn die ist wie beschrieben nur für die Fälle definiert, in denen X wahr ist, im Beispiel, wenn Sokrates existiert.

0-4-5-5 FAZIT

1. Ich halte den *Implikations-Ansatz* (funktionales Modell) zur Darstellung der Kopula für überlegen, auch im Hinblick auf Wörter/Zeichen bzw. Objekte. Es ist ein Modell mit großer Kompetenz zur *Vereinheitlichung*. Man kann es sowohl auf Extensionen wie Intensionen beziehen. Und es wirkt – technisch – eleganter.

2. Allerdings hat das implikative Modell auch Nachteile: So ist die Darstellung als *Teilmengen-Relation* (z. B. „die Klasse der Mathematiker ist eine Teilmenge der Klasse der Wissenschaftler“) *ontologisch* unproblematischer als die implikative Darstellung „wenn jemand Mathematiker ist, dann ist er auch Wissenschaftler“ oder in der konjunktiven Umformung „es ist nicht möglich, dass jemand Mathematiker, aber nicht Wissenschaftler ist“); denn es ist fraglich, wie eine *Konditional-Beziehung* (wenn – dann) oder ein ausgeschlossener, *negativer Sachverhalt* ontologisch einzuordnen sind. Allenfalls die Formulierung mit ‚impliziert’ ist ontologisch einigermaßen unproblematisch, aber gerade bei Klassen ungewöhnlich, z. B. „die Klasse der Mathematiker impliziert die Klasse der Wissenschaftler“. Auch verbindet man mit dem Begriff der *Extension* eines (kopulativen) Satzes eher eine *Mengen*-Relation als eine *Wenn-dann*-Relation. Hier ist der *Mengen-Ansatz* überlegen.

Auch *partikuläre* (oder statistische) Aussagen wie ‚*einige* F sind G’ lassen sich durch Mengen-Relationen einfacher darstellen. *Funktional* müsste man z. B. formulieren: ‚Wenn F realisiert ist, dann ist in *einigen* Fällen auch G realisiert’.

3. Obwohl ich das Implikations-Modell dennoch insgesamt für überlegen halte, werde ich im Wesentlichen an der *üblichen* Darstellung festhalten,

- dass man nämlich bei *Wörtern* (bzw. *Atom-Relationen*) den Mengen-Ansatz verwendet, also die Kopula als *Teilmengen-Relation* darstellt (z. B. $x_i \subset F$) und
- dass man nur bei *Sätzen* (bzw. *Molekül-Relationen*) die Kopula als Implikation darstellt (z. B. $A \rightarrow B$).

Diese Differenzierung kann man als ‚*kombiniertes Modell’* bezeichnen.

Der primäre Grund für diese Wahl ist: Ich möchte mich möglichst weitgehend in den bekannten Logikbahnen bewegen, um meinen Text nicht unnötig schwierig zu gestalten.

0 – 5 SYNTHETISCH UND ANALYTISCH

0-5-1 Gegenüberstellung

Der Unterschied zwischen *synthetisch* und *analytisch* wurde schon mehrfach angesprochen, soll aber erst jetzt systematisch und ausführlich erläutert werden.

Ich bin bisher überwiegend von *synthetischen* Relationen (bzw. Sätzen) ausgegangen. Doch die Logik zielt primär auf die *analytischen* Relationen, vor allem auf *Schlüsse* oder *Folgen*. Man bezeichnet auch die ganze Logik als „Lehre von der Folgerichtigkeit".

Der Unterschied zwischen synthetischen und analytischen Relationen (bzw. Sätzen, Aussagen, Urteilen, Sachverhalten) ist von großer Bedeutung, in der Logik, in der Sprachphilosophie, aber im Grunde in der gesamten Philosophie. Diese Unterscheidung spielt auch im vorliegenden Buch eine wesentliche Rolle, sie ist sogar maßgeblich in die *inhaltliche* Unterteilung des Buches eingegangen. Allerdings ist es kompliziert und umstritten, wie man „analytisch" und „synthetisch" am besten definiert. Ich möchte hier zunächst fünf Möglichkeiten diskutieren. Dabei wählt man am günstigsten einen s*prachlichen* Ansatz, d. h. man geht von *Sätzen / Aussagen* aus und nicht neutral von *Relationen* (und auch nicht von Sachverhalten).

Folgende Parameter dienen zur *Unterscheidung* von synthetischen und analytischen Sätzen:

- enthalten sein / neu hinzukommen
- zerlegen / zusammenfügen
- sichere Wahrheit / unsichere Wahrheit
- vollständige theoretische Wahrheit / partielle theoretische Wahrheit
- theoretische Wahrheitsprüfung / empirische Wahrheitsprüfung

Dabei konzentriere ich mich in diesem einführenden Punkt 0-5-1 auf *einfache* (atomare) sowie *inhaltlich* bestimmte analytische / synthetische Sätze der *normalen Sprache*.

0-5-1-1 ENTHALTEN SEIN ODER NEU HINZUKOMMEN

Bezüglich dieser Dichotomie ergibt sich folgender Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Sätzen:

– *analytischer* Satz: das Prädikat ist im Subjekt bereits *enthalten*.

Z. B. der Satz ‚alle Ehemänner sind verheiratet'. Hier ist der Begriff „verheiratet" schon im Begriff „Ehemann" enthalten.

– *synthetischer* Satz: das Prädikat ist im Subjekt *nicht enthalten*, fügt ihm Neues hinzu.

Z. B.: ‚alle Ehemänner sind glücklich'. Hier ist das Prädikat nicht im Subjekt enthalten, das zeigt sich auch schon daran, dass dieser Satz offensichtlich falsch ist.

Genauer geht es hier aber nicht um das Prädikat (z. B. ‚sind verheiratet'), sondern um den Prädikat-*Begriff* (‚verheiratet'), man spricht auch von 'Prädikatsnomen' oder ‚Prädikativum'.

Entsprechend geht es um den Subjekt-*Begriff*. Präzise können wir dann sagen:

- *synthetischer* Satz: der Prädikat-Begriff ist *nicht* im Subjekt-Begriff enthalten.
- *analytischer* Satz: der Prädikat-Begriff ist im Subjekt-Begriff schon enthalten.

0-5-1-2 ZERLEGEN ODER ZUSAMMENFÜGEN

Die obige Definition hat eine Schwäche. Man betrachtet nämlich nicht nur einen Satz wie ‚alle Ehemänner sind verheiratet' als *analytisch*, sondern auch den Satz ‚alle Ehemänner sind unverheiratet'. Hier ist der Prädikat-Begriff „unverheiratet" aber gerade *nicht* im Subjekt-Begriff „Ehemänner" *enthalten*, sondern vielmehr *ausgeschlossen*. Im ersten Fall liegt eine *Tautologie* vor, im zweiten Fall eine *Kontradiktion*.

Wir unterscheiden somit:

analytisch-*tautologische* Sätze

analytisch-*kontradiktorische* Sätze

Um auch solche kontradiktorischen Fälle zu erfassen, könnte man modifiziert formulieren:

- *analytischer* Satz: das Prädikat kann durch *Zerlegung* des Subjekts gefunden werden.

Dies passt auch deswegen, weil *Analyse* ja wörtlich Zerlegung bedeutet. Durch Analyse des Begriffs „Ehemann" kann man sowohl den *notwendigen* Begriff „verheiratet" wie den *unmöglichen* Begriff „unverheiratet" finden.

- *synthetischer* Satz: das Prädikat wird nur durch Hinzufügung, Zusammenfügung gefunden.

Auch dies passt besonders gut, weil das Wort ‚Synthese' wörtlich *Zusammenfügung* bedeutet. Im Begriff „Ehemann" findet man nicht den Begriff „glücklich", dieser verhält sich zufällig zum Begriff „Ehemann". Sondern der Prädikatbegriff wird hinzugefügt.

0-5-1-3 SICHERE ODER UNSICHERE WAHRHEIT

Man betrachte folgende zwei Beispiel-Sätze:

– ‚Dieser Junggeselle ist blond'.

– ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet'.

Der erste Satz kann wahr sein oder falsch, seine Wahrheit ist somit *ungewiss*, nicht sicher.
Der zweite Satz ist dagegen *mit Sicherheit* wahr, ein Falschsein ist ausgeschlossen.

Man kann diese Unterschiede mit Hilfe der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* genau angeben. Die theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = r/n$ gibt an: erstens, die Anzahl der logisch möglichen Welten (= n), zweitens, in wie vielen dieser Welten der Satz wahr ist (= r). Anders gesagt, die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt an, wie sicher die Wahrheit eines Satzes ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird im Punkt 0-5 nur informell eingeführt und verwendet, eine genaue und systematische Darstellung erfolgt in Kap. 3 und Kap. 4.

Wir bestimmen nun die *Sicherheit* mittels der theoretischen Wahrscheinlichkeit:

– Zum Satz ‚Dieser Junggeselle ist blond':

Er hat eine Chance von 50%, wahr zu sein (bzw. falsch zu sein), seine theoretische Wahrscheinlichkeit beträgt somit 0,5. Dieser Satz ist *synthetisch*.

– Zum Satz ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet':

Da er sicher wahr ist, hat er eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 1,0. Dieser Satz ist *analytisch-tautologisch*.

Wir können festhalten:

- *synthetischer* Satz: er hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit < 1 und > 0
- *analytisch-tautologischer* Satz: er hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 1

Kontradiktionen sind weniger bedeutsam als Tautologien. Sie haben eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 0. Wir können zusammenfassend sagen: Analytische Sätze haben eine *deterministische* theoretische Wahrscheinlichkeit, d. h. den Wert 1 oder den Wert 0.

0-5-1-4 VOLLSTÄNDIGE ODER PARTIELLE THEORETISCHE WAHRHEIT

Dieser Punkt knüpft am vorausgegangenen an. Wir können unterscheiden zwischen einer *empirischen* und einer *theoretischen* Wahrheit. Die theoretische Wahrheit nenne ich auch *Tautologie*. Es geht es hier in erster Linie um Wahrheit *innerhalb eines Systems*. Man nennt die theoretische Wahrheit oft auch ‚*logische Wahrheit'*, etwas missverständlich, denn all diese Bestimmungen finden im Rahmen der Logik statt, sind also gewissermaßen „logisch".

Nun lässt sich *quantitativ* gleichsetzen:

theoretische Wahrscheinlichkeit = theoretische Wahrheit

Der theoretischen Wahrscheinlichkeit entspricht somit quantitativ ein Grad an theoretischer Wahrheit, man kann auch sagen ein *Tautologie-Grad*.

Auch wenn die theoretische *Wahrscheinlichkeit* und die theoretische *Wahrheit* quantitativ *den gleichen Wert* haben, können wir doch *semantisch* unterscheiden:

– für den synthetischen Satz: ‚Dieser Junggeselle ist blond' gilt:

er ist *mit* 50 % (theoretischer) Wahrscheinlichkeit (empirisch) wahr

er ist *zu* 50% (theoretisch) wahr, zu 50% tautologisch

– für den analytischen Satz: ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet' gilt:

er ist *mit* 100 % (theoretischer) Wahrscheinlichkeit (empirisch) wahr

er ist *zu* 100% (theoretisch) wahr, zu 100% tautologisch

Zwar lassen sich auch interessante Aussagen über die *empirische* Wahrheit von synthetischen und analytischen Sätzen machen, z. B. ist ein *tautologischer* Satz auch immer *empirisch wahr* und ein *kontradiktorischer* Satz immer *empirisch falsch*. Dennoch, zur Abgrenzung von analytischen und synthetischen Sätzen dient nur die *theoretische* Wahrheit. Es gilt also:

• analytischer Satz

– Tautologien sind *theoretisch* vollständig wahr (100%)

– Kontradiktionen sind *theoretisch* gar nicht wahr bzw. vollständig falsch (0%)

• synthetischer Satz

Synthetische Sätze sind theoretisch partiell wahr, sie haben einen partiellen *Grad von theoretischer Wahrheit* (zwischen 0% und 100% bzw. zwischen 0 und 1).

0-5-1-5 THEORETISCHE ODER EMPIRISCHE WAHRHEITSPRÜFUNG

Wir können auch anstatt vom *Wahrheitsstatus* des Satzes selbst auszugehen, die Notwendigkeit einer (empirischen) *Prüfung* des Satzes als Kriterium der Unterscheidung von synthetisch und analytisch verwenden.

Dies ist eine fünfte, mehr *pragmatische* Bestimmung. Hier gilt:

• *analytischer* Satz: seine Wahrheit kann durch *theoretische Analyse* bestimmt werden – bzw. bedarf es gar keiner Untersuchung.

Um zu beurteilen, ob eine analytische Relation (ein analytischer Satz) *empirisch* wahr ist, muss ich keine empirischen Untersuchungen vornehmen. Dass der Satz ‚Jeder Ehemann ist verheiratet' wahr ist, weiß ich *a priori*, ich muss dazu nicht Ehemänner untersuchen, sondern nur die *Definitionen* meiner Sprache kennen. Ebenso weiß ich, dass der Satz ‚jeder Ehemann ist unverheiratet' falsch ist. Allerdings wäre es *möglich*, einen solchen Satz auch empirisch zu *prüfen*: Ich muss dann eben alle Ehemänner z. B. befragen, ob sie verheiratet sind.

Für die Ermittlung der *theoretischen* Wahrheit muss ich einen Satz natürlich ohnehin nicht empirisch untersuchen, sondern eine theoretische Analyse vornehmen, obwohl es normalerweise evident ist, ob ein Satz tautologisch bzw. kontradiktorisch ist oder nicht.

• *synthetischer* Satz: seine *empirische* Wahrheit muss durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden. Z. B. der Satz: ‚Jeder Ehemann ist glücklich'.

Um zu beurteilen, ob dieser synthetischer Satz wahr ist, muss ich empirische Untersuchungen anstellen: Beobachtung, Befragung, Experiment usw. Ich kann die Wahrheit oder Falschheit des Satzes nur *a posteriori* feststellen. Denn dieser Satz kann offensichtlich wahr oder falsch sein (real dürfte er wie gesagt falsch sein); um die Richtigkeit herauszufinden, muss ich Ehemänner befragen und statistische Methoden verwenden. Aber auch bei einem *synthetischen* Satz muss / kann ich die *theoretische* Wahrheit durch theoretische Analyse feststellen.

Im vorliegenden Punkt haben wir uns auf *einfache*, *normal-sprachliche, material-analytische (bzw. synthetische)* Sätze als Beispiele konzentriert. Im Folgenden geht es primär um *formal-logische*, *molekulare* Sätze, d. h. aussagen-logische Sätze wie ‚$X \rightarrow Y$'.

0-5-2 Synthetische Relationen

0-5-2-1 BESTIMMUNG

Zur zusammenfassenden Definition von „synthetisch" greife ich zunächst auf die in 0-5-1 vorgestellten Ansätze zurück.
Für einen *synthetischen* Satz gilt:

- das Prädikat(snomen) ist im Subjekt *nicht enthalten*
- das Prädikat wird *nicht durch Analyse* gefunden
- seine empirische Wahrheit ist *nicht sicher*, er kann wahr sein oder falsch
- er ist *theoretisch* nicht vollständig wahr (und nicht vollständig falsch)
- seine (empirische) Wahrheit muss durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden.

0-5-2-2 SYNTAKTISCHE BESTIMMUNG

Ich habe bisher nur *logisch-semantische* Kriterien angegeben. Man kann aber auch *syntaktische* Kriterien zur Abgrenzung von synthetisch und analytisch verwenden. Für einen synthetischen Satz gilt, *syntaktisch* betrachtet:

Rechts und *links* von der *Kopula* ‚ist' (oder einem entsprechenden Ausdruck) stehen nur unterschiedliche deskriptive Zeichen, z. B. ‚Sokrates – ist – Philosoph'.

Speziell für aussagen-logische Relationen kann man formulieren:
Rechts und *links* vom *Relator* stehen *nur unterschiedliche* deskriptive Zeichen.

Also z. B. $X \rightarrow Y$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$ usw.

Man kann das allerdings auch *semantisch* deuten:

Bei einer synthetischen Relation sind die *Relata* unterschiedlich, d. h. es werden unterschiedliche *Objekte (*bzw. Eigenschaften) miteinander in Beziehung gebracht.

0-5-2-3 MATERIAL UND FORMAL

Man unterscheidet normalerweise nur zwischen material-analytisch und formal-analytisch, aber man kann entsprechend auch zwischen *material-synthetisch* und *formal-synthetisch* unterscheiden. Zu Erklärung müssen wir am besten auf die Bestimmungen von *material*-analytisch und *formal*-analytisch *v*orgreifen (vgl. 0-5-3-4).

Material

- Material-analytisch ist ein Satz, dessen Wahrheit (oder Falschheit) auf *Definitionen* beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind unverheiratet'. Ein Junggeselle ist definiert als ‚unverheirateter Mann', insofern ist der Beispielsatz laut Definition wahr.
- *Material-synthetisch* ist daher ein Satz, dessen Wahrheit (oder Falschheit) *nicht* auf Definitionen beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind blond'; denn der Begriff ‚blond' gehört nicht zur Definition von ‚Junggeselle'.

Formal

- Formal-analytisch ist ein Satz, dessen Wahrheit allein auf *logischen Gesetzen* beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind Junggesellen' oder $X \Rightarrow X$. (Und $X \Rightarrow X$ ist ein logisches Gesetz.)

• *Formal-synthetisch* ist daher ein Satz, dessen Wahrheit nicht allein auf logischen Gesetzen beruht. Somit ist z. B. auch der material-analytische Satz ‚alle Junggesellen sind unverheiratet' ein formal-synthetischer Satz, entsprechend $X \rightarrow Y$.

0-5-2-4 ATOMAR UND MOLEKULAR

Ein *Atom-Satz* ist wie beschrieben ein *einfacher* Satz, ein *Molekular-Satz* dagegen ein *komplexer*, aus mehreren Teilsätzen zusammengefügter Satz, wobei die genaue Abgrenzung jedoch schwierig ist.

• Atom-Satz

Ein *synthetischer* Atomsatz ist z. B. ‚Peter ist Weinliebhaber' (*prädikaten-logisch*: $x \in F$). Wir hatten synthetisch u. a. definiert: Man kann aus dem Subjekt nicht auf das Prädikat schließen, das Prädikat ist nicht im Subjekt enthalten. Im Beispiel: Aus ‚Peter' können wir nicht auf ‚(ist) Weinliebhaber' schließen. *Aussagen-logisch* wird ein Atom-Satz *ohne Struktur* dargestellt, also z. B. als ‚X'. ‚X' könnte *material*-analytisch sein, aber nicht *formal*-analytisch – und darauf kommt es hier an, daher können wir ‚X' als *synthetisch* bestimmen.

• Molekular-Satz

Im Beispiel: ‚Wenn Peter Weinliebhaber ist, dann ist Peter auch Zigarrenliebhaber'. Dies ist offensichtlich ein synthetischer Satz. Hier liegt logisch gesehen eine Implikation vor, formal $X \rightarrow Y$. Wiederum: ‚$X \rightarrow Y$' könnte *material*-analytisch sein, aber nicht *formal*-analytisch.

Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ hat bekanntlich folgende *Wahrheitstafel*:

	$X \rightarrow Y$	
1.	+ + +	$X \wedge Y$
2.	+ – –	$X \wedge \neg Y$: in dieser Welt ist $X \rightarrow Y$ falsch
3.	– + +	$\neg X \wedge Y$
4.	– + –	$\neg X \wedge \neg Y$

Daraus können wir erstens sehen: Entsprechend wie wir oben sagten, der Prädikat-Begriff ist nicht (semantisch) im Subjekt-Begriff enthalten, gilt hier: das *Folgeglied* Y ist nicht im *Vorderglied* X enthalten.

Anders gesagt: Man kann die Gültigkeit von Y (Folgeglied) nicht erkennen, in dem man X (Vorderglied) analysiert. In der vertrauten Sprache der Aussagenlogik: Man kann die Wahrheit von Y (Nachsatz) nicht erkennen, in dem man X (Vordersatz) analysiert.

Wie die Wahrheitstafel zeigt: Wenn ich weiß, dass X wahr ist, weiß ich noch nichts über die Wahrheit von Y – wenn mir nicht bekannt ist, ob der Gesamtsatz $X \rightarrow Y$ wahr ist; Y kann wahr sein (1. Zeile) oder falsch (2. Zeile).

0-5-2-5 TAUTOLOGIE-GRAD

Man kann aber nicht nur angeben, ein synthetischer Satz ist *nicht (ganz) tautologisch* und ist *nicht (ganz) kontradiktorisch*, sondern genauer den *Grad der Tautologie* bzw. den Grad der Kontradiktion bestimmen. Denn wie schon beschrieben, gebe ich auch für synthetische Sätze einen Tautologie-Grad an, der auf der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* beruht.

Z. B. $X \rightarrow Y$ kann empirisch wahr sein oder falsch, je nachdem, wofür X und Y stehen. Bei synthetischen Sätzen hängt die Wahrheit also von der *Bedeutung* ab, man kann für einen *formalen* Satz wie $X \rightarrow Y$ nicht vorab sagen, ob er empirisch wahr ist, man muss zunächst wissen, was ‚X' und ‚Y' bedeuten; so kann man z. B. für den *inhaltlich bestimmten* Satz ‚Es regnet $\rightarrow$ die Strasse ist nass' angeben, dass er wahr ist.

Allerdings ist es a priori *wahrscheinlicher*, dass der formale Satz X $\rightarrow$ Y wahr ist. Denn wie man in der Wahrheitstafel sieht: in 3 von 4 möglichen Fällen gilt X $\rightarrow$ Y als wahr. Anders gesagt: Obwohl die Relation X $\rightarrow$ Y synthetisch ist, ist sie zu 3/4 *tautologisch*. Diese Bestimmung dürfte ungewohnt sein, weil man normalerweise davon ausgeht, dass synthetische Sätze keinen oder jedenfalls nicht einen so hohen Tautologiegrad haben.

Man kann den *Grad der Tautologie* berechnen nach dem *Wahrheitswertverlauf*, konkret:

$$\frac{\text{Anzahl der +}}{\text{Anzahl der + und –}}$$

D. h. man berechnet die Anzahl der Welten, in denen die Relation *positiv* (+) ist, in Relation zu der *Gesamtanzahl* der Welten (+ und –).

0-5-3 Analytische Relationen

0-5-3-1 BESTIMMUNG

Analytische Relationen sind 1) *Tautologien* oder 2) *Kontradiktionen*.

Für eine *Tautologie* gilt:

• das Prädikat ist im Subjekt *enthalten*, fügt ihm nichts Neues hinzu
• das Prädikat wird nur durch *Analyse* des Subjekts gefunden
• ihre (empirische) Wahrheit ist *vollständig sicher*
• sie ist theoretisch *vollständig wahr*, ist in allen möglichen Welten wahr
• ihre (empirische) Wahrheit muss *nicht* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

Für eine *Kontradiktion* gilt:

• das Prädikat ist im nicht Subjekt *enthalten*, wird vielmehr von ihm ausgeschlossen
• das Prädikat wird durch Analyse des Subjekts, nämlich dessen Verneinung gefunden
• ihre (empirische) Falschheit ist *vollständig sicher*
• sie ist theoretisch *vollständig falsch*, ist in allen möglichen Welten falsch
• ihre (empirische) Falschheit muss *nicht* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

0-5-3-2 SYNTAKTISCH

Sowohl für Tautologien wie für Kontradiktionen gilt: *links* und *rechts* von der *Kopula*, dem Junktor, dem Relator o. ä. finden sich *(partiell) gleiche* Zeichen.

z. B. Tautologie: $X \Rightarrow X$, $(X \wedge Y) \Rightarrow X$, $X \vee \neg X$

z. B. Kontradiktion: $(X \vee \neg X) \nRightarrow (X \wedge \neg X)$

(Allerdings gibt es hier Ausnahmen, Pseudo-Tautologien wie $X \Rightarrow Y \vee \neg Y$, vgl. später.)

0-5-3-3 TAUTOLOGIE VERSUS KONTRADIKTION

• *Tautologien*

Wir hatten ursprünglich (für einen *Atom-Satz*) bestimmt: Ein Satz ist *analytisch*, wenn der Prädikats-Begriff im Subjekt-Begriff enthalten ist. Z. B.: ‚Jeder Junggeselle ist unverheiratet'.

Bei einem logischen *Molekular-Satz*, einer *Implikation,* kann man entsprechend sagen: Eine Implikation ist analytisch-tautologisch, wenn das *Nachglied* im *Vorderglied* enthalten ist.
Als Beispiel die *Abtrennungs-Regel*:

(X	∧	Y)	⇒	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	–	+	+	+
–	–	–	+	–

Bei diesem Beispiel ist es – schon syntaktisch – besonders deutlich: Y ist Teil von $X \wedge Y$. Aber *logisch-semantisch* gilt auch bei: $X \Rightarrow X \vee Y$; $X \vee Y$ ist Teil von X.

Anders gesagt: Wenn das Vorderglied $X \wedge Y$ positiv ist, dann ist auch das Nachglied Y positiv, mit Sicherheit (denn es gibt nur *einen* derartigen Fall, die erste Zeile der Wahrheitstafel). Dabei ist die Gesamtrelation *immer*, *in jeder möglichen Welt* positiv, sie ist zu 4/4 tautologisch, besitzt also einen Tautologiegrad von 1. Man kann also aus der *Analyse* der Prämissen die Gültigkeit des *Schluss-Satzes* erkennen, deshalb heißen solche Relationen *analytisch*.

Noch einmal in der Sprache der Aussagenlogik gesagt: Bei einer analytischen Implikation (logischen Folge) ist der *Informationsgehalt* des Schluss-Satzes (Y) in der Konjunktion der Prämissen $(X \wedge Y)$ enthalten.

Aber man kann auch wieder Bezug auf den *Gesamtsatz*, z. B. $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ nehmen.
Dann lässt sich definieren:
– *Tautologie:* ist in *jeder* möglichen Welt wahr
hat in der Wahrheitstafel nur + (plus) unter dem *Zentral-Relator*
– *Kontradiktion*: ist in *keiner* möglichen Welt wahr, also in jeder möglichen Welt falsch
hat in der Wahrheitstafel nur – (minus) unter dem *Zentral-Relator*

Man kann hier noch einen weiteren Aspekt hinzufügen: Bei einem analytisch-tautologischen Satz wie $X \Rightarrow X$ kann man *unabhängig von der Bedeutung* sagen, dass er wahr ist; ein tautologischer Satz ist allein von seiner *Form* her wahr, hier brauche ich nicht zu wissen, wofür ‚X' und ‚Y' stehen, ich muss diese Variablen nicht interpretieren.

• *Kontradiktion*
Auch *Kontradiktionen,* d. h. logisch widersprüchliche Relationen, rechnet man zu den *analytischen* Relationen. Ein *atomare* Kontradiktion ist: ‚Alle Junggesellen sind verheiratet'.

Bei der – *molekularen* – *Implikation* gilt: Eine Kontradiktion ist nur gegeben, wenn das *Vorderglied tautologisch* und das *Nachglied kontradiktorisch* ist. Zur Symbolisierung verwende ich den durchgestrichenen Doppelpfeil.

(X	∨	¬	X)	⇏	(X	∧	¬	X)
+	+	–	+	–	+	–	–	+
+	+	–	+	–	+	–	–	+
–	+	–	+	–	–	–	+	–
–	+	–	+	–	–	–	+	–

0-5-3-4 FORMAL-ANALYTISCH / MATERIAL-ANALYTISCH
Wie schon angesprochen, muss man genau unterscheiden zwischen:
• *material-analytischen* Relationen (beruhen auf *Definitionen:* „material")
• *formal-analytischen* Relationen (beruhen nur auf logischen Gesetzen)

• material-analytisch: Z. B. „Jeder Junggeselle ist unverheiratet"
Um die Wahrheit dieser Relation zu erkennen, muss man keine Untersuchungen machen, man muss nur die *Bedeutungen* und *Definitionen* kennen, also wissen: Ein *Junggeselle* ist definiert als *unverheirateter Mann*. Insofern ist die Aussage „Jeder Junggeselle ist unverheiratet" laut Definition wahr. Material-analytische Relationen bzw. Sätze spielen in der *formalen* Logik keine große Rolle, weil hier eben normalerweise *vom Inhalt abstrahiert* wird.

• formal-analytisch: Z. B. „Jeder Junggeselle ist ein Junggeselle"
Um die Wahrheit dieser Relation festzustellen, muss man nicht einmal die Bedeutung von ‚Junggeselle' kennen, man muss nur um das *logische Gesetz* $X \Leftrightarrow X$ wissen: „Jedes Objekt ist mit sich selbst identisch bzw. logisch äquivalent". $X \Leftrightarrow X$ ist dann natürlich selbst auch formal-analytisch. Es mag irritieren, dass ich hier einen *normal*-sprachlichen Satz wie ‚Jeder Junggeselle ist ein Junggeselle' als Beispiel für *formal*-analytisch nennen. Aber ‚formal' meint hier eben nicht, dass der Satz *formalisiert* ist, sondern nur, dass seine Analyzität allein auf *formalen* Gesetzen beruht. Ich beschränke ich mich nachfolgend in erster Linie auf *formal* analytische Relationen, denn nur diese sind wirklich logisch relevant.

0-5-3-5 TAUTOLOGIE-GRAD
Wir haben schon vom Tautologie-Grad bei *synthetischen* Relationen gesprochen. Selbstverständlich lässt sich auch bei *analytischen* Relationen – mittels der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* – ein Tautologie-Grad bestimmen. Allgemein können wir festlegen:

	Tautologie-Grad
synthetisch	$< 1 \wedge > 0$
analytisch	
– tautologisch	1
– kontradiktorisch	0

0-5-4 Semi-analytische Relationen

0-5-4-1 BESTIMMUNG
Diese Unterscheidung zwischen synthetisch und analytisch ist grundlegend. Ich vertrete aber die These, dass man dazwischen als drittes *partiell analytische* Relationen bzw. Strukturen unterscheiden kann. Anstelle von ‚partiell analytisch' kann man auch ‚semi-analytisch' sagen.

Z. B. *material*: ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet (analytisch) und glücklich (synthetisch)'. Der Satz ist *semi-analytisch*, weil der Begriff ‚unverheiratet' zur *Definition* von ‚Junggeselle' gehört, der Begriff ‚glücklich' aber nicht.

Oder *formal* die Relation $(X \vee Y) \longrightarrow Y$. Sie hat folgende Wahrheitstafel:

X	$\vee$	Y	$\longrightarrow$	Y
+	+	+	+	+
+	+	–	–	–
–	+	+	+	+
–	–	–	+	–

Diese Relation ist, wie $X \to Y$, in 3 von 4 Welten positiv, sie ist also auch zu 3/4 tautologisch. Sie hat sogar den gleichen Wahrheitswerte-Verlauf wie $X \to Y$ (+ – + +).

Dennoch liegt hier *keine synthetische* Relation vor. Im Gegensatz zum synthetischen $X \to Y$ kommt Y schon in dem Vorderglied $X \vee Y$ vor. D. h. man kann durch *Analyse* des Vordergliedes etwas über die Wahrheit von Y erfahren. Wenn ich weiß, dass $X \vee Y$ positiv ist, weiß ich mit gewisser *Wahrscheinlichkeit* (nämlich 2/3), dass Y positiv ist, ohne die Gültigkeit der Gesamt-Relation zu kennen. Allerdings erhält man keine *sichere* Information.

$(X \vee Y) \longrightarrow Y$ kann man auch einen *induktiven* Schluss nennen, im Gegensatz zu einem (streng) *deduktiven* Schluss wie z. B. $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$.

Auch anders lassen sich *synthetische* und *semi-analytische* Relationen unterscheiden. Z. B. hat die *synthetische* Implikation $X \to Y$ grundsätzlich den Wahrheitsverlauf + – + +; dagegen kann eine *semi-analytische* Implikation $\Phi \longrightarrow \Psi$ jeden möglichen Wahrheitsverlauf annehmen, mit Ausnahme von + + + + (Tautologie) oder – – – – (Kontradiktion). vollständig analytischen Relationen wie *Tautologie* und *Kontradiktion* sind *Grenzfälle* der semi-analytischen Relationen.

Generell können wir für *semi-analytische* Relationen (bzw. Sätze) festlegen:
- das Prädikat ist *partiell* im Subjekt *enthalten*, fügt ihm partiell Neues hinzu
- das Prädikat wird *partiell* durch *Analyse des Subjekts* gefunden
- die empirische Wahrheit ist nicht vollständig sicher
- sie ist theoretisch *partiell* wahr – nicht vollständig wahr und nicht vollständig falsch
- ihre empirische Wahrheit muss *partiell* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden.

Die *partiell analytische Implikation* (semi-analytische Implikation) kennzeichne ich durch den *langen Pfeil* $\longrightarrow$ im Gegensatz zum *kurzen Pfeil* $\to$ der synthetischen Implikation.

Herkömmlicherweise werden *semi-analytische* Relationen den *synthetischen* gleichgesetzt oder – falls man sie als Schluss ausgibt – als falscher, *ungültiger Schluss* interpretiert. Ich meine aber, dass sie eine Sonderrolle besitzen.

Ich halte die Annahme semi-analytischer Relationen für wesentlich. Allerdings kann man verschiedene *Einwände* dagegen erheben. Darauf will ich hier kurz eingehen.

0-5-4-2 ÄQUIVALENZ-EINWAND

1. Einwand: *Semi-analytische* Relationen sind logisch analytisch äquivalent mit *synthetischen* Relationen, z. B. gilt:

$$(X \to Y) \longrightarrow Y \;\Leftrightarrow\; (X \vee Y)$$

Antwort: Hier zeigt sich, dass *Wahrheitswerte* nicht ausreichen, um unterschiedliche Relationen bzw. Sätze zu unterscheiden. Wahrheitswerte sind zwar ggf. *notwendig*, um die Bedeutung eines Satzes zu bestimmen, aber nicht *hinreichend*. $(X \to Y) \longrightarrow Y$ und $X \vee Y$ sind jedenfalls nach meiner Definition jedenfalls extensional nicht gleich (vgl. 0-3-4-5).

Denn es wäre absurd zu behaupten, alle Strukturen mit *gleichem* Wahrheitswerteverlauf seien ganz *gleichbedeutend*, so hätten z. B. alle logischen Gesetze (Werteverlauf + + + +) dieselbe Bedeutung, wozu brauchte man dann überhaupt mehr als *ein* Gesetz?

Die beiden Relationen

$$X \vee Y \text{ und } (X \to Y) \longrightarrow Y$$

haben zwar denselben Wahrheitswerteverlauf (+ + + –), aber nur $(X \to Y) \longrightarrow Y$ ist *partiell analytisch*. $X \vee Y$ ist dagegen *synthetisch*. Bei $X \vee Y$ wird eine Relation zwischen zwei (vorher) *unabhängigen* Sätzen X und Y konstatiert, bei $(X \to Y) \longrightarrow Y$ ist der Satz Y ja bereits *Teil* von $X \to Y$, die beiden Relata $X \to Y$ und Y sind also logisch voneinander *abhängig*.

0-5-4-3 ZWISCHENGLIED-EINWAND

2. Einwand: Es gibt *kein Zwischenglied* von synthetischen und analytischen Relationen. So gilt: $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg X)$

Fügt man nun noch $(X \wedge \neg Y)$ disjunktiv hinzu, so erhält man eine *Tautologie*, denn $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg X)$ ist tautologisch.

D. h. es gibt quasi einen *fließenden Übergang* von einem synthetischen Satz wie $X \rightarrow Y$ zu einem analytischen Satz, einer Tautologie. Wo ist hier Platz für ein Zwischenglied, wo ist Platz für partiell-analytische Relationen?

Antwort: Das mit dem *fließenden Übergang* ist richtig, und aus diesem Grund habe ich eine andere neuartige Definition von ‘synthetisch’ vorgenommen (die später noch genauer erläutert werden wird). Synthetische Sätze können nämlich „beinahe“ tautologisch oder auch „beinahe“ kontradiktorisch sein. Darin stimmen sie mit semi-analytischen Sätzen überein.

Das bedeutet aber nicht, dass synthetische und semi-analytische Relationen identisch sind. Sie werden eben auf andere Weise, syntaktisch und semantisch, voneinander unterschieden.

0-5-4-4 MODAL-LOGIK-EINWAND

3. Einwand: Semi-analytische Relationen widersprechen der *Modal-Logik*.
In der Modal-Logik gilt: notwendig $\Rightarrow$ möglich

Nun könnte man definieren:

tautologisch = notwendig, semi-analytisch = möglich

Müsste demnach nicht gelten: tautologisch $\Rightarrow$ semi-analytisch?

Dies stimmt aber nicht, denn: Eine Tautologie kann keine semi-analytische Relation logisch implizieren, eine Tautologie impliziert logisch *nur* wiederum eine Tautologie: Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie; somit kann aus einer Tautologie keine semi-analytische Relation logisch folgen.

Faktisch gilt das Umgekehrte:
semi-analytisch $\Rightarrow$ tautologisch

z. B. $[(X \vee Y) \longrightarrow Y] \Rightarrow [(X \wedge Y) \Rightarrow Y]$

Das hieße aber: Semi-analytische Relation (= möglich) $\Rightarrow$ Tautologie (= notwendig), also:

möglich $\Rightarrow$ notwendig

Somit widerspricht das Konzept der semi-analytischen Relationen der Modal-Logik.

Antwort: Hier liegt eine unzulässige Übertragung vor: „notwendig $\Rightarrow$ möglich“ bezieht sich auf *dieselbe* Relation. Wenn eine Relation $R(\Phi, \Psi)$ notwendig ist, dann ist sie auch möglich. $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ und $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ sind aber unterschiedliche Relationen, für die das Gesetz „notwendig $\Rightarrow$ möglich“ nicht gilt. Außerdem lässt sich dieses Gesetz, wie überhaupt eine vollständige Modal-Logik, ohnehin nur im Rahmen der *Quantoren-Logik* begründen, nicht innerhalb der *Aussagen-Logik* (wie später noch zu erläutern ist).

0-5-4-5 TERMINOLOGIE

Begrifflich variiere ich zwischen folgenden *Termini*, um mich nicht immer zu wiederholen:

- *(synthetische) Implikation*
  = nicht analytische Implikation = Wenn-Dann-Relation = Wenn-Dann-Satz
  (dagegen ist der Begriff ‚empirische Implikation’ problematisch)
- *Analytische Implikation*
  = streng analytische Implikation = strenger Schluss = vollständig analytischer Schluss = vollständiger Schluss = tautologischer Schluss = logische Folge = Deduktion u. ä.
  (Von Kontradiktionen sehe ich hier ab.)

• *Semi-analytische Implikation*
= partiell analytische Implikation = semi-analytischer Schluss = partieller Schluss = partiell tautologischer Schluss = induktiver Schluss = partielle logische Folge u. ä.

Abschließend sei aber durchaus zugegeben, dass beim Ansatz der *semi-analytischen* Relationen noch Fragen offen sind, dass es noch ungelöste Probleme gibt. Im *quantitativen* Bereich ist das Konzept der semi-analytischen Relationen allerdings relativ unproblematisch (vgl. später). Das Konzept *partiell analytischer Relationen*, z. B. Implikationen, ist zwar wichtig für die vorliegende Arbeit, aber keinesfalls entscheidend für mein logisches Gesamtmodell. Die meisten Aussagen behielten auch dann ihre Berechtigung, wenn man – in herkömmlicher Weise – nur zwischen synthetisch und analytisch unterscheidet.

0-5-5 Symbole

0-5-5-1 IMPLIKATIVE RELATIONEN
Für die *Implikation* bzw. *implikative* Relationen verwende ich folgende Pfeil-Symbole:

- synthetisch $X \rightarrow Y$
- semi-analytisch $X \vee Y) \longrightarrow Y$
- tautologisch $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$
- kontradiktorisch $(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (X \wedge \neg X)$

Zur besseren Veranschaulichung bringe ich auch noch einmal *materiale,* inhaltliche Beispiele (obwohl die in der Logik im engeren Sinn keine Rolle spielen):

- synthetisch Dieser Junggeselle ist Porschefahrer
- semi-analytisch Dieser Junggeselle ist ein lediger Professor
- tautologisch Dieser Junggeselle ist ein Junggeselle
- kontradiktorisch Dieser Junggeselle ist seit 10 Jahren verheiratet

„Dieser Junggeselle ist ein lediger Professor“ ist ein semi-analytischer Satz, weil „verheiratet“ ein analytisches Merkmal ist, „Professor“ aber ein synthetisches.

Zwar könnte man aussagen-logisch auch in jedem der vier *formalen* Fälle immer nur dasselbe Symbol $\rightarrow$ verwenden, es würde scheinbar zu einfacheren Formeln führen. Aber ich finde es wichtig, den *logischen Status* einer Relation sofort sichtbar herauszustellen. Meistens schreibt man die Formeln ohne Wahrheitstafel, so dass ihr logischer Status, ohne unterschiedliche Pfeile, nicht immer unmittelbar zu erkennen wäre.

Implikation, *Replikation* und *Äquivalenz* kann man als *implikative Relationen* zusammenfassen, obwohl das etwas willkürlich ist, weil sich auch andere Relationen in Implikationen umformen lassen (vgl. 0-4).

Für die *Replikation* $X \leftarrow Y$ und die *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y$ gilt Entsprechendes wie für die Implikation und ich verwende entsprechende Symbole, also für die Äquivalenz-Tautologie $\Leftrightarrow$ bzw. für die Replikation-Tautologie $\Leftarrow$.

0-5-5-2 POSITIV-IMPLIKATION
Hier gibt es die entsprechenden Relationen: Ich verwende wie beschrieben jeweils das Symbol der *normalen* Implikation mit Stern * davor.

- synthetisch $X *\!\!\rightarrow Y$
- semi-analytisch $X \vee Y) *\!\!\longrightarrow Y$
- tautologisch $(X \wedge Y) *\!\!\Rightarrow Y$
- kontradiktorisch $(X \vee \neg X) *\!\!\nRightarrow (X \wedge \neg X)$

Zu den Besonderheiten komme ich später.

0-5-5-3 ANDERE RELATOREN

Bisher habe ich nur die *Implikation* behandelt. Auch bei anderen Relatoren bzw. Junktoren wie der *Konjunktion* oder der *Disjunktion* gibt es prinzipiell die gleichen 4 Arten von Relationen, obwohl die semi-analytischen Relationen besonders bei den implikativen Relationen von Bedeutung sind. Nun ist das Problem, dass es – anders als bei der Implikation – keine verbreiteten Symbole für die verschiedenen Möglichkeiten gibt.

Ich verwende folgende Symbole (als Beispiel Konjunktion):

- ohne Zusatz: für synthetische Relation: $X \wedge Y$
- mit + + für Tautologie: $X \,{}^{+}\!\wedge^{+}\, Y$
- mit – – für Kontradiktion: $X \,{}^{-}\!\wedge^{-}\, Y$
- mit + – für semi-analytische Relation: $X \,{}^{+}\!\wedge^{-}\, Y$

Das + – schreibe ich aber nur, wenn die semi-analytische Relation die *Hauptrelation* eines Relationssystems ist, weil es optisch sonst stört.

Insofern müsste der o. g. kontradiktorische Ausdruck korrekt wie folgt geschrieben werden:

$(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \nRightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

So ist sofort zu erkennen, dass vorne eine Tautologie und hinten eine Kontradiktion steht.

Diese Symbole + (plus) und – (minus) sind quasi *selbsterklärend*, sie beziehen sich unmittelbar auf die Wahrheitstafel:

bei einer *Tautologie* gibt es nur +
bei einer *Kontradiktion* nur –
bei der *semi-analytischen* Relation + –.

0-5-5-4 ÜBERSICHT ÜBER ANALYTISCHE SYMBOLE

Ich habe oben verschiedene *Notationen* für Relatoren eingeführt und erläutert, fasse hier aber noch einmal die Symbole für *(semi-)analytische* Relationen zusammen.

Implikative Relationen formalisiere ich immer durch einen Pfeil (wie weit verbreitet):

Tautologien durch einen *Doppelpfeil*,
Kontradiktionen durch den *durchgestrichenen Doppelpfeil*
semi-analytische Relationen durch den *verlängerten Pfeil*.

- *Implikation*

Tautologie: $\Rightarrow$
Kontradiktion: $\nRightarrow$
Semi-analytisch: $\longrightarrow$

- *Äquivalenz*

Tautologie: $\Leftrightarrow$
Kontradiktion: $\nLeftrightarrow$
Semi-analytisch: $\longleftrightarrow$

• *Replikation*
Tautologie: $\Leftarrow$
Kontradiktion: $\not\Leftarrow$
Semi-analytisch: $\longleftarrow$

Für a*ndere*, nicht implikative Relationen gilt wie gesagt:
Tautologien formalisiere ich durch + + über dem Junktor, z. B. ${}^{+}\vee^{+}$
Kontradiktionen durch – – über dem Junktor, z. B. ${}^{-}\wedge^{-}$
semi-analytische Relationen durch + – über dem Junktor, z. B. ${}^{+}\gt\lt^{-}$.

Allerdings verzichte ich bei semi-analytischen Relationen ggf. auch auf die Kennzeichnung durch $^{+\,-}$, denn aus der Struktur ist normalerweise direkt erkennbar, ob ein Ausdruck synthetisch ist oder (semi-)analytisch ist, und Tautologien und Kontradiktionen werden eben ausgewiesen.
Die Kennzeichnung von tautologisch, kontradiktorisch und semi-analytisch durch hochgestellte + +, – –, + – ist nicht üblich, aber sie hat, wie schon erläutert, große Vorteile.

Konjunktion
Tautologie: ${}^{+}\wedge^{+}$
Kontradiktion: ${}^{-}\wedge^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{+}\wedge^{-}$

Disjunktion
Tautologie: ${}^{+}\vee^{+}$
Kontradiktion: ${}^{+}\vee^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{-}\vee^{-}$

Analytische Relationen kürze ich ggf. mit ‘A’ ab (*A-Relation*), also z. B. *A-Implikation* für die analytische Implikation. Wenn man die *synthetischen* Relationen hervorheben will, kann man sie mit ‚S’ kennzeichnen, also als S-Relationen.

0-5-5-5 BEDEUTUNG DER SYMBOLISIERUNG

Die Wahl geeigneter *Symbole* ist sehr wichtig. Denn man verwendet Symbole ja schließlich dazu, einen Sachverhalt klarer, präziser und übersichtlicher darzustellen. Wenn die Symbole das nicht leisten, sind sie fehl am Platz. Insofern sind bei der Wahl der Symbole verschiedene Aspekte zu berücksichtigen:
Bekanntheit, optische Prägnanz, Verwechslungsmöglichkeiten, Systematik, Schreibtechnik und andere. So wäre es aus *systematischen* Gründen z. B. optimal, auch die implikativen Relationen (inklusive der Positiv-Implikation) mit der +/– Symbolik darzustellen, also die Implikation $\rightarrow$ mit ${}^{+}\!\rightarrow^{+}$ und ${}^{-}\!\rightarrow^{-}$ und ${}^{+}\!\rightarrow^{-}$. Da aber der Doppelpfeil $\Rightarrow$ und der durchgestrichene Doppelpfeil $\not\Rightarrow$ gut eingeführt sind, habe ich sie beibehalten. Auch für die *Positiv-Implikation* habe ich viele Symbole ausprobiert, um möglichst geeignete zu finden, aber es bleibt immer ein Kompromiss.